



# Planification des réapprovisionnements sous incertitudes pour les systèmes d'assemblage à plusieurs niveaux

Oussama Ben-Ammar

## ► To cite this version:

Oussama Ben-Ammar. Planification des réapprovisionnements sous incertitudes pour les systèmes d'assemblage à plusieurs niveaux. Autre. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2014. Français. NNT : 2014EMSE0756 . tel-01134474

**HAL Id: tel-01134474**

**<https://theses.hal.science/tel-01134474>**

Submitted on 23 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



NNT : 2014 EMSE 0756

# THÈSE

présentée par

Oussama BEN AMMAR

pour obtenir le grade de

Docteur de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne

Spécialité : Génie Industriel

## PLANIFICATION DES RÉAPPROVISIONNEMENTS SOUS INCERTITUDES POUR LES SYSTÈMES D'ASSEMBLAGE À PLUSIEURS NIVEAUX

soutenue à Saint-Étienne, le 09 Octobre 2014

### Membres du jury

Président :	Noureddine ZERHOUNI	Professeur, ENSMM, Besançon
Rapporteurs :	Caroline THIERRY	Professeur, Université de Toulouse Jean Jaurès
	Nidhal REZG	Professeur, Université de Lorraine, Metz
Examineur :	Henri PIERREVAL	Professeur, IFMA, Aubière
	Jean-Claude HENNET	Directeur de recherche au CNRS, LSIS, Marseille
	Faïcel HNAÏEN	Maître de conférences, UTT, Troyes
Directeur de thèse :	Alexandre DOLGUI	Professeur, ENSMSE, Saint Etienne
Co-encadrants de thèse :	Hélène MARIAN	Maître assistant, ENSMSE, Saint Etienne
	Mohamed Aly OULD- LOULY	Professeur, King Saud University, Arabie Saoudite

Spécialités doctorales

SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX  
MECANIQUE ET INGENIERIE  
GENIE DES PROCEDES  
SCIENCES DE LA TERRE  
SCIENCES ET GENIE DE L'ENVIRONNEMENT

Responsables :

K. Wolski Directeur de recherche  
S. Drapier, professeur  
F. Gruy, Maître de recherche  
B. Guy, Directeur de recherche  
D. Grailliot, Directeur de recherche

Spécialités doctorales

MATHEMATIQUES APPLIQUEES  
INFORMATIQUE  
IMAGE, VISION, SIGNAL  
GENIE INDUSTRIEL  
MICROELECTRONIQUE

Responsables

O. Roustant, Maître-assistant  
O. Boissier, Professeur  
JC. Pinoli, Professeur  
A. Dolgui, Professeur  
S. Dauzere Peres, Professeur

EMSE : Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)

ABSI	Nabil	CR		CMP
AVRIL	Stéphane	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
BALBO	Flavien	PR2		FAYOL
BASSEREAU	Jean-François	PR		SMS
BATTON-HUBERT	Mireille	PR2	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BERGER DOUCE	Sandrine	PR2		FAYOL
BERNACHE-ASSOLLANT	Didier	PR0	Génie des Procédés	CIS
BIGOT	Jean Pierre	MR(DR2)	Génie des Procédés	SPIN
BILAL	Essaid	DR	Sciences de la Terre	SPIN
BOISSIER	Olivier	PR1	Informatique	FAYOL
BORBELY	Andras	MR(DR2)	Sciences et génie des matériaux	SMS
BOUCHER	Xavier	PR2	Génie Industriel	FAYOL
BRODHAG	Christian	DR	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
BRUCHON	Julien	MA(MDC)	Mécanique et ingénierie	SMS
BURLAT	Patrick	PR2	Génie Industriel	FAYOL
COURNIL	Michel	PR0	Génie des Procédés	DIR
DARRIEULAT	Michel	IGM	Sciences et génie des matériaux	SMS
DAUZERE-PERES	Stéphane	PR1	Génie Industriel	CMP
DEBAYLE	Johan	CR	Image Vision Signal	CIS
DELAFOSSSE	David	PR1	Sciences et génie des matériaux	SMS
DESRAYAUD	Christophe	PR2	Mécanique et ingénierie	SMS
DOLGUI	Alexandre	PR0	Génie Industriel	FAYOL
DRAPIER	Sylvain	PR1	Mécanique et ingénierie	SMS
FEILLET	Dominique	PR2	Génie Industriel	CMP
FEVOTTE	Gilles	PR1	Génie des Procédés	SPIN
FRACZKIEWICZ	Anna	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GARCIA	Daniel	MR(DR2)	Génie des Procédés	SPIN
GERINGER	Jean	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	CIS
GOEURIOT	Dominique	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
GRAILLLOT	Didier	DR	Sciences et génie de l'environnement	SPIN
GROSSEAU	Philippe	DR	Génie des Procédés	SPIN
GRUY	Frédéric	PR1	Génie des Procédés	SPIN
GUY	Bernard	DR	Sciences de la Terre	SPIN
HAN	Woo-Suck	CR	Mécanique et ingénierie	SMS
HERRI	Jean Michel	PR1	Génie des Procédés	SPIN
KERMOUCHE	Guillaume	PR2	Mécanique et Ingénierie	SMS
KLOCKER	Helmut	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
LAFOREST	Valérie	MR(DR2)	Sciences et génie de l'environnement	FAYOL
LERICHE	Rodolphe	CR	Mécanique et ingénierie	FAYOL
LI	Jean-Michel		Microélectronique	CMP
MALLIARAS	Georges	PR1	Microélectronique	CMP
MOLIMARD	Jérôme	PR2	Mécanique et ingénierie	CIS
MONTHEILLET	Frank	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
MOUTTE	Jacques	CR	Génie des Procédés	SPIN
NEUBERT	Gilles			FAYOL
NIKOLOVSKI	Jean-Pierre			CMP
NORTIER	Patrice	PR1		SPIN
PIJOLAT	Christophe	PR0	Génie des Procédés	SPIN
PIJOLAT	Michèle	PR1	Génie des Procédés	SPIN
PINOLI	Jean Charles	PR0	Image Vision Signal	CIS
POURCHEZ	Jérémy	CR	Génie des Procédés	CIS
ROBISSON	Bruno			CMP
ROUSSY	Agnès	MA(MDC)		CMP
ROUSTANT	Olivier	MA(MDC)		FAYOL
ROUX	Christian	PR		CIS
STOLARZ	Jacques	CR	Sciences et génie des matériaux	SMS
TRIA	Assia	Ingénieur de recherche	Microélectronique	CMP
VALDIVIESO	François	MA(MDC)	Sciences et génie des matériaux	SMS
VIRICELLE	Jean Paul	MR(DR2)	Génie des Procédés	SPIN
WOLSKI	Krzystof	DR	Sciences et génie des matériaux	SMS
XIE	Xiaolan	PR1	Génie industriel	CIS
YUGMA	Gallian	CR	Génie industriel	CMP

ENISE : Enseignants-chercheurs et chercheurs autorisés à diriger des thèses de doctorat (titulaires d'un doctorat d'État ou d'une HDR)

BERGHEAU	Jean-Michel	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
BERTRAND	Philippe	MCF	Génie des procédés	ENISE
DUBUJET	Philippe	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
FEULVARCH	Eric	MCF	Mécanique et Ingénierie	ENISE
FORTUNIER	Roland	PR	Sciences et Génie des matériaux	ENISE
GUSSAROV	Andrey	Enseignant contractuel	Génie des procédés	ENISE
HAMDI	Hédi	MCF	Mécanique et Ingénierie	ENISE
LYONNET	Patrick	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
RECH	Joël	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
SMUROV	Igor	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
TOSCANO	Rosario	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE
ZAHOUANI	Hassan	PU	Mécanique et Ingénierie	ENISE

**Oussama BEN AMMAR**

## **REPLENISHMENT PLANNING UNDER UNCERTAINTY FOR MULTI-LEVEL ASSEMBLY SYSTEMS**

**Speciality :** Industrial Engineering

**Keywords :** MRP, Assembly systems, uncertainty, Lead times, Optimization, Genetic algorithm, Branch and bound.

### **Abstract :**

In the current industrial context, the offer is largely higher than the demand. Therefore, the customers are more and more exigent. To distance themselves, companies need to offer to their customers the best quality products, the best costs, and with controlled lead times as short as possible. Last years, the struggle for reducing costs was accentuated within companies. However, stocks represent an important financial asset, and therefore, it is essential to control them. In addition, a bad management of stocks led either to delays in delivery, which generate additional production costs, either to the unnecessary inventory. The latter one can occur at different levels (from components at the last level to finished product), it costs money and immobilize funds. That is why, planners have to look for efficient methods of production and supply planning, to know exactly for each component, and when to order and in which quantity.

The aim of this doctoral thesis is to investigate the supply planning in an uncertain environment. We are interested in a replenishment planning for multi-level assembly systems under a fixed demand and uncertainty of components lead times.

We consider that each component has a fixed unit inventory cost; the finished product has an inventory cost and a backlogging cost per unit of time. Then, a general mathematical model for replenishment planning of multi-level assembly systems, genetic algorithm and branch and bound method are presented to calculate and to optimize the expected value of the total cost which equals to the sum of the inventory holding costs for the components, the backlogging and the inventory holding costs for the finished product.

We can state by the different results that the convergence of the GA doesn't depend only on the number of components in the last level but also on the number of levels, the type of the BOM and the backlogging cost for the finished product.

**Oussama BEN AMMAR**

## **PLANIFICATION DES RÉAPPROVISIONNEMENTS SOUS INCERTITUDES POUR LES SYSTÈMES D'ASSEMBLAGE À PLUSIEURS NIVEAUX**

Spécialité : Génie Industriel

Mots clefs : MRP, Systèmes d'assemblage, Incertitude, Délais d'approvisionnement, Optimisation, Algorithme Génétique, Procédure par Séparation et Évaluation.

### Résumé :

Dans le contexte actuel marqué par l'instabilité des marchés, les clients sont de plus en plus exigeants. Un client qui n'est pas approvisionné à une date souhaitée peut soit remettre son achat à plus tard, soit aller chercher le produit chez un concurrent. De plus, l'entreprise doit faire face à de multiples imprévisibilités internes, de la concurrence ou d'événements extérieurs. Ces aléas induisent de l'incertitude dans la planification de la production et génèrent des sources nombreuses de retard, de désynchronisation et de pertes de productivité.

Ce travail de thèse s'intègre dans la problématique de la planification de la production dans un environnement incertain. Nous étudions des problèmes de la planification des réapprovisionnements pour un système d'assemblage à plusieurs niveaux, quand les délais d'approvisionnement sont incertains.

Nous avons choisi comme indicateur de performance l'espérance du coût total moyen qui est égal à la somme du coût de stockage des composants, le coût de rupture du produit fini et le coût de stockage du produit fini. Des propriétés théoriques, des modèles analytiques ainsi que des méthodes d'optimisation ont été proposés. Nous avons montré que la résolution du problème ne dépend pas seulement de la méthode de résolution et du nombre de niveaux, mais aussi du coût de rupture en produit fini et de la structure du système d'assemblage.

*Je dédie ce travail à mes parents, sans qui je ne serais pas où j'en suis aujourd'hui...*

# Remerciement

*Tout d'abord je tiens à remercier mon directeur de thèse, Monsieur Alexandre Dolgui, Professeur de l'École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne qui m'a dirigé durant ce travail. Sa compétence, son appui scientifique et ses conseils m'ont beaucoup appris. Ils ont été et resteront des moteurs de mon travail de chercheur.*

*Je tiens ensuite à exprimer ma reconnaissance à mes encadrants Madame Hélène Marian et Monsieur Mohamed Aly Ould-Louly pour leurs immenses aides pour mener à bien ces travaux de recherche.*

*Je voudrais remercier Madame Caroline Thierry et Monsieur Nidhal Rezg d'avoir accepté de relire cette thèse et d'en être rapporteurs. La version finale de ce mémoire a bénéficié de leur lecture très attentive et de leurs remarques précieuses. Je tiens à remercier Monsieur Noureddine Zerhouni d'avoir accepté d'être président du jury. Je remercie également tous les membres du jury d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail : Monsieur Henri Pierreval, Monsieur Jean-Claude Hennet et Monsieur Faicel Hnaïen.*

*A titre plus personnel, je remercie chaleureusement mes amis et à toutes les personnes que j'ai côtoyées durant ces années de thèse, qui à un moment ou un autre de l'élaboration de cette thèse, m'ont apporté leurs soutiens ; je pense également à Malik, Evgeny, Mickaël, Reda, Hamid, Guillaume, Afaf, Sarra, Nahla, Akram, Maria, Chaker, Solène, Mathieu, Myriam, Jean-Philippe et Espéran.*

*Je remercie aussi tous ceux sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est : aussi bien par les échanges scientifiques que j'ai eu la chance d'avoir avec eux, leurs conseils. Je pense ici en particulier à Monsieur Xavier Delorme, Monsieur Nicolas Durand, Monsieur Romain Guillaume, Monsieur Frédéric Grimaud et Madame Claudie Chabriac.*

*Pour terminer, je voudrais encore remercier ma famille : mes parents, Asmae, Fares, Nessrine, Nermin et Sanae pour leurs soutiens qui m'ont été bien utiles durant ma thèse.*





## Table des matières

Introduction Générale .....	11
Chapitre 1 : La gestion de stocks et des approvisionnements dans des chaînes logistiques .....	13
Introduction.....	13
1.1 Méthodes de gestion de stocks indépendante dans des chaînes logistiques .....	14
1.1.1 Les différentes politiques classiques de gestion de stocks .....	14
1.2 La politique de planification de type MRP (gestion de stocks dépendants).....	17
Exemple introductif:.....	18
Chapitre 2 : Utilisation de techniques MRP sous incertitudes .....	22
2.1 Chaînes d'approvisionnement à structure linéaire.....	24
2.2 Systèmes d'assemblage .....	27
2.2.1 Délais d'approvisionnement incertains et demande déterministe .....	28
2.2.2 Délais d'approvisionnement et demande incertains .....	34
2.2.3 Demande incertaine .....	36
2.3 Nervosité de la méthode MRP .....	39
2.4 Les paramètres du MRP.....	40
2.4.1 Stocks et délais de sécurité .....	40
2.4.2 Technique de lotissement .....	43
2.5 Conclusions.....	46
Chapitre 3 : Optimisation d'un système d'assemblage à deux niveaux par une PSE.....	48
3.1 Introduction.....	48
3.2 Description du problème.....	49
3.3 Détermination des coûts .....	52
3.4 Réduction de l'espace de recherche initiale.....	63
3.5 Optimisation .....	67
3.5.1 Problème à résoudre .....	67
3.5.2 Borne supérieure.....	68
3.5.3 Borne inférieure .....	68
3.5.4 Dépendance verticale entre les bornes inférieures.....	73
3.5.5 Dépendance horizontale entre les bornes inférieures .....	81
3.6 Étude expérimentale et résultats .....	83
3.6.1 Exemples numériques .....	83
3.6.2 Tests numériques du comportement de la PSE.....	86

3.7	Conclusions.....	88
Chapitre 4 : Optimisation d'un système d'assemblage à deux niveaux par un Algorithme Génétique .....		89
4.1	Introduction.....	89
4.2	Problème à résoudre .....	90
4.3	Algorithme génétique .....	91
4.3.1	Codage .....	93
4.3.2	Génération de la population initiale.....	93
4.3.3	Évaluation : fitness .....	94
4.3.4	Stratégie de sélection .....	94
4.3.5	Croisement.....	95
4.3.6	Mutation.....	96
4.3.7	Procédure de perturbation.....	97
4.3.8	Recherche locale .....	100
4.3.9	Critère d'arrêt.....	102
4.4	Étude expérimentale et résultats .....	102
4.4.1	Exemples numériques .....	102
4.4.2	Comportement de l'AG .....	103
4.5	Conclusions.....	109
Chapitre 5 : Optimisation d'un système d'assemblage multi-niveaux .....		111
5.1	Introduction.....	111
5.2	Description du problème.....	112
5.3	Détermination des coûts .....	113
5.4	Réduction de l'espace de recherche initiale.....	124
5.5	Optimisation .....	128
5.1.1	Problème à résoudre .....	128
5.1.2	Procédure par séparation et évaluation .....	128
5.1.3	Algorithme génétique .....	133
5.6	Étude expérimentale et résultats .....	134
5.1.4	Exemples numériques .....	134
5.1.5	Tests de performances .....	138
5.2	Conclusions.....	151
Conclusions Générales.....		152

Bibliographie .....	154
Annexes .....	165

## Liste des tables

<b>Tableau 1.1</b> : Plan Directeur de Production .....	19
<b>Tableau 1.2</b> : Délais d'approvisionnement et stocks disponibles .....	19
<b>Tableau 1.3</b> : MRP sur les semaines 0 à 9 .....	19
<b>Tableau 2.1</b> : Incertitudes des délais d'approvisionnement.....	33
<b>Tableau 2.2</b> : Incertitude sur la demande.....	37
<b>Tableau 2.3</b> : Stocks de sécurité et délais de sécurité pour le paramétrage d'un système MRP .....	43
<b>Tableau 3.1</b> : Notations .....	50
<b>Tableau 3.2</b> : Loi de distribution des délais d'approvisionnement .....	84
<b>Tableau 3.3</b> : Les coûts de stockage des composants.....	84
<b>Tableau 3.4</b> : Espace de recherche .....	85
<b>Tableau 3.5</b> : Dates d'approvisionnement optimales .....	85
<b>Tableau 3.6</b> : L'effet des différentes techniques sur le comportement de la Procédure par Séparation et Évaluation.....	86
<b>Tableau 3.7</b> : Le temps moyen de calcul (en secondes).....	87
<b>Tableau 4.1</b> : Algorithme génétique pur sans la Génération Spécifique de la Population Initiale ni procédure de Perturbation ni Recherche Locale.....	104
<b>Tableau 4.2</b> : Algorithme génétique renforcé par une procédure de perturbation et une Recherche Locale .....	105
<b>Tableau 4.3</b> : Algorithme génétique renforcé par une technique de Génération Spécifique de la Population Initiale ....	105
<b>Tableau 4.4</b> : Algorithme génétique renforcé par une procédure de perturbation, une technique de Génération Spécifique de la Population Initiale et une Recherche Locale .....	106
<b>Tableau 5.1</b> : Notations .....	113
<b>Tableau 5.2</b> : La distribution de probabilité des délais d'approvisionnement .....	135
<b>Tableau 5.3</b> : Les coûts de stockage des composants.....	135
<b>Tableau 5.4</b> : Les limites supérieures de l'espace de recherche réduit.....	136
<b>Tableau 5.5</b> : Dates d'approvisionnement optimales .....	136
<b>Tableau 5.6</b> : Effet des différentes propriétés sur le comportement de la PSE .....	137
<b>Tableau 5.7</b> : Effet des différentes techniques utilisées sur le comportement de l'AG .....	137
<b>Tableau 5.8</b> : Nomenclatures des différents systèmes d'assemblage. ....	139
<b>Tableau 5.9</b> : L'influence des différentes techniques sur l'AG.....	140
<b>Tableau 5.10</b> : Nombre moyen de générations avant que les meilleures solutions ne soient trouvées .....	145
<b>Tableau 5.11</b> : Temps de calcul nécessaires pour trouver les meilleures solutions .....	145
<b>Tableau 5.12</b> : Gap moyen.....	147
<b>Tableau 5.13</b> : Gap* moyen avec la meilleure solution connue .....	149

## Liste des figures

<b>Figure 1.1</b> : Pilotage de flux dans une chaîne logistique.....	15
<b>Figure 1.2</b> : Gestion à point de commande.....	16
<b>Figure 1.3</b> : Niveau de rechargement.....	17
<b>Figure 1.4</b> : Nomenclature du produit fini.....	19
<b>Figure 2.1</b> : Les 4 principales catégories d'incertitudes ([Dolgui and Prodhon, 2007]) .....	23
<b>Figure 3.1</b> : Description de la nomenclature .....	49
<b>Figure 3.2</b> : Illustration du problème.....	53
<b>Figure 3.3</b> : L'espérance mathématique du coût total .....	57
<b>Figure 3.4</b> : Décomposition du système d'assemblage en plusieurs chaînes linéaires.....	64
<b>Figure 3.5</b> : Détermination de $q_{\alpha j}$ qui a une probabilité cumulée supérieure ou égale à $bb + r$ .....	66
<b>Figure 3.6</b> : Représentation de l'arbre d'exploration .....	69
<b>Figure 3.7</b> : Position d'un composant $ck', 2$ dans la nomenclature.....	71
<b>Figure 3.8</b> : Simplification verticale dans le calcul de la borne inférieure .....	74
<b>Figure 3.9</b> : Exemple illustrant le 1 <sup>er</sup> cas. ....	75
<b>Figure 3.10</b> : Exemple illustrant le 2 <sup>ème</sup> cas.....	78
<b>Figure 3.11</b> : Exemple illustrant le 3 <sup>ème</sup> cas.....	79
<b>Figure 3.12</b> : Simplification horizontale dans le calcul de la borne inférieure.....	81
<b>Figure 3.13</b> : Présentation de la nomenclature. ....	83
<b>Figure 3.14</b> : L'évolution de la borne inférieure.....	86
<b>Figure 4.1</b> : Fonctionnement fondamental de l'algorithme génétique .....	92
<b>Figure 4.2</b> : Exemple d'un chromosome à 10 gènes.....	93
<b>Figure 4.3</b> : Exemple de croisement d'un couple de parents. ....	96
<b>Figure 4.4</b> : Procédure proposée pour créer une perturbation. ....	98
<b>Figure 4.5</b> : Exemple illustrant la mutation par bloc. ....	99
<b>Figure 4.6</b> : Structure générale de l'AG proposé.....	101
<b>Figure 4.7</b> : Comparaison du nombre d'itérations moyens obtenus par les différentes méthodes.....	106
<b>Figure 4.8</b> : Comparaison des <i>gap</i> moyens obtenus par les différentes méthodes .....	107
<b>Figure 4.9</b> : Comparaison des <i>gap</i> * moyens obtenus par les différentes méthodes.....	107
<b>Figure 4.10</b> : Comparaison du temps de calcul moyen avant que la meilleure solution soit trouvée .....	108
<b>Figure 4.11</b> : Évolution du <i>gap</i> à partir de la meilleure solution connue.....	108
<b>Figure 5.1</b> : Description de la nomenclature .....	112
<b>Figure 5.2</b> : Illustration de problème.....	114
<b>Figure 5.3</b> : Composition de l'espérance mathématique du coût total .....	119
<b>Figure 5.4</b> : Décomposition du système d'assemblage en plusieurs chaînes linéaires.....	125
<b>Figure 5.5</b> : Représentation de l'arbre d'exploration .....	130
<b>Figure 5.6</b> : L'évolution de la borne inférieure.....	136
<b>Figure 5.7</b> : L'évolution du nombre moyen de générations en fonction du nombre de niveaux .....	141
<b>Figure 5.8</b> : L'évolution du <i>gap</i> moyen en fonction du nombre de niveaux .....	142
<b>Figure 5.9</b> : L'évolution du <i>gap</i> * moyen en fonction du nombre de niveaux.....	143
<b>Figure 5.10</b> : Comparaison des temps de calcul moyens (avant que la meilleure solution ne soit trouvée) .....	144
<b>Figure 5.11</b> : Nombre moyen de générations et CPU time pour <i>F3</i> .....	146
<b>Figure 5.12</b> : Nombre moyen de générations et CPU time pour <i>C3</i> .....	148
<b>Figure 5.13</b> : <i>gap</i> * <i>moyen</i> et <i>gap</i> <i>moyen</i> de <i>F3</i> .....	150
<b>Figure 5.14</b> : <i>gap</i> * <i>moyen</i> et <i>gap</i> <i>moyen</i> de <i>C3</i> .....	150

## Introduction Générale

Pour l'entreprise, la gestion de production est un véritable enjeu. Une organisation efficace de toute la chaîne logistique est nécessaire pour pouvoir satisfaire les clients à moindre coût et pour être en possession des composants nécessaires à la fabrication de produits demandés à la date voulue. Autrement dit, la maîtrise des flux d'information et physiques de l'approvisionnement en matières premières jusqu'à la livraison du produit final est nécessaire pour honorer les commandes à une date donnée.

Dans le contexte actuel marqué par l'instabilité des marchés, les clients sont de plus en plus exigeants. Un client qui n'est pas approvisionné à une date souhaitée peut soit remettre son achat à plus tard, soit aller chercher le produit chez un concurrent. De plus, l'entreprise doit faire face à de multiples imprévisibilités internes, de la concurrence ou d'événements extérieurs. Ces aléas induisent de l'incertitude et génèrent de nombreuses sources de retard, de désynchronisation et de pertes de productivité. Pour faire face à ces incertitudes et être capable de satisfaire la demande en permanence, les entreprises doivent disposer de systèmes de planification et de production avancés.

Ce travail de thèse s'intègre dans la problématique de la planification de la production dans un environnement incertain. En effet, différentes sources d'incertitude peuvent perturber un environnement de production telle que la variabilité de la demande et des délais d'approvisionnement. Nous trouvons dans la littérature scientifique plusieurs études sur la planification de la production et des réapprovisionnements dans un environnement incertain. La variabilité de la demande est la source d'aléas la plus analysée. Les autres sources sont moins étudiées, notamment la variabilité des délais d'approvisionnement. Pourtant, ces délais sont rarement déterministes ; différents facteurs peuvent les rendre difficilement prévisibles telles que les pannes machines, les problèmes de transports ou les fortes variabilités de commandes, par exemple.

De plus, à part ces problèmes liés aux incertitudes, la structure de la chaîne constitue une difficulté supplémentaire. Dans les entreprises fabriquant des produits constitués de nombreux composants, d'une part une interdépendance entre les stocks de ces composants au même niveau d'assemblage peuvent rendre les opérations d'assemblage difficilement planifiables puisqu'il faut attendre tous les composants nécessaires à l'assemblage d'un produit semi-fini pour pouvoir déclencher son assemblage. D'autre part, une interdépendance entre les niveaux peut générer des désynchronisations puisqu'un produit fini est assemblé si et seulement si tous les produits semi-finis qui le composent ont été déjà assemblés.

Notre sujet de thèse étudie le problème de la planification des réapprovisionnements pour un système d'assemblage à plusieurs niveaux, quand les délais d'approvisionnement sont incertains. Vu la complexité du problème, nous nous limitons à la planification des réapprovisionnements pour un seul type de produit fini et sur une seule période de planification, c'est-à-dire pour une date de livraison du produit fini et une quantité commandée connues. Des propriétés théoriques, des modèles analytiques ainsi que des méthodes d'optimisation seront proposés.

Nous précisons que les temps de cycle planifiés, qui sont les différences entre les dates voulues de livraison et les dates de lancement des ordres de fabrication, sont nos variables de décisions. Notre étude a pour objectif, entre autre, la proposition de techniques et de méthodes de paramétrage des systèmes de type MRP dans un environnement incertain, plus précisément quand les délais d'approvisionnement sont incertains.

Cette thèse est composée de cinq chapitres :

Le premier chapitre a pour objectif de présenter des éléments théoriques sur la gestion des chaînes logistiques. Nous présentons des méthodes de gestion de stocks et de planification de production. Différentes politiques classiques de gestion de stocks seront présentées et un intérêt particulier sera accordé aux politiques de type MRP.

Le chapitre II situe notre domaine d'étude spécifique (système MRP sous incertitude). Il s'agit de s'intéresser au paramétrage du MRP dans un environnement incertain. Une classification des problèmes en fonction du type de chaîne logistique est proposée. Les différentes sources d'aléas sont étudiées et les méthodes pour faire face à l'instabilité du système MRP sous incertitudes sont présentées.

Dans le chapitre III, nous nous intéressons au problème de la planification des approvisionnements d'un système d'assemblage à deux niveaux quand les délais d'approvisionnement sont aléatoires. Il s'agit du cas où le système MRP générerait des entrées et des sorties d'une chaîne logistique à deux niveaux, tandis que les flux entre les niveaux ne sont pas gérés par le système MRP. Nous cherchons alors les valeurs optimales des dates de lancement des ordres aux fournisseurs du niveau 1 minimisant l'espérance mathématique du coût total qui est égal à la somme du coût de stockage des composants et des produits semi-finis et des coûts de rupture et de stockage du produit fini. Nous présentons un algorithme d'optimisation basé sur la technique de séparation et d'évaluation (PSE). Les tests montrent l'efficacité de l'algorithme pour résoudre des problèmes de petite taille et de taille moyenne.

Le chapitre IV propose une méthode d'optimisation approchée à base d'un algorithme génétique. Plusieurs techniques ont été introduites pour pouvoir résoudre des problèmes de taille plus importante et garantir un bon compromis entre la qualité des solutions obtenues et le temps de calcul.

Enfin, dans le chapitre V, nous proposons un modèle général permettant une étude des systèmes d'assemblage multi-niveaux quel que soit le nombre de niveaux. Une procédure par séparation et évaluation a été développée. Un algorithme génétique renforcé par différentes techniques de recherche locale a également été proposé.

Nous terminons ce mémoire par un bilan, ainsi qu'un ensemble de voies possibles allant du court terme (proche des résultats de la thèse) à des questions plus générales sur l'utilisation de nos techniques pour le paramétrage du système MRP dans un environnement incertain.

## **Chapitre 1 : La gestion de stocks et des approvisionnements dans des chaînes logistiques**

### **Introduction**

Ces dernières années, l'optimisation de la chaîne logistique est devenue un objectif primordial pour les entreprises. Elles visent à réduire au mieux les délais d'approvisionnement et les coûts engendrés depuis les fournisseurs jusqu'aux clients finaux. La disponibilité d'un produit fini est fortement conditionnée par l'approvisionnement en matières premières, en éléments d'assemblage ou en composants à tous les niveaux de la chaîne de production. On appelle ainsi « chaîne logistique » l'ensemble de flux des produits et de l'information relatifs à la logistique d'approvisionnement (approvisionnement, transport, gestion de stocks, manutention, etc.). Elle assure une collaboration étroite avec l'ensemble des acteurs et prend en charge l'ensemble de la gestion des flux matières qui transforment progressivement les matières premières et les produits semi-finis en produits finis.

Dans le contexte industriel actuel, l'offre est largement supérieure à la demande, et par conséquent les clients sont de plus en plus exigeants. Pour se distinguer, les entreprises doivent proposer à leurs clients des produits de bonne qualité, aux meilleurs coûts, et avec des délais maîtrisés et les plus courts possibles. Or, des incertitudes peuvent perturber la chaîne logistique telle que l'incertitude sur la quantité ou l'incertitude sur le temps.

Pour faire face aux aléas liés à l'incertitude de la quantité demandée ou du processus de production (panne machines, délais de fabrication, défauts de fabrication, etc.), des stocks de sécurités sont souvent utilisés. Or, ces stocks représentent une immobilisation financière importante ; il est donc primordial de réduire leurs niveaux ou les maîtriser afin de réduire le coût de production.



Cette diminution de stocks doit se faire de façon optimale, sinon elle risque de conduire soit à des ruptures, qui engendrent une baisse du taux de service et du chiffre d'affaires, soit à des stocks inutiles.

Nous distinguons plusieurs types de stocks tels que les stocks de matières premières, des en-cours et des produits finis. Il est important d'élaborer des méthodes de planification de la production et des approvisionnements efficaces afin de déterminer pour chaque matière première, composant, produit semi-fini la quantité exacte à commander et le moment approprié pour déclencher la commande.

## **1.1 Méthodes de gestion de stocks indépendante dans des chaînes logistiques**

Les décisions en pilotage de flux proviennent de plusieurs informations : état du système, niveaux de stock, demande, délais d'approvisionnement, etc. Les deux premiers types d'informations peuvent être obtenus de diverses façons car ils sont internes au système. Les prévisions liées à la demande et aux délais d'approvisionnement sont deux paramètres difficiles à cerner. Pour limiter les effets de leurs variabilités, différentes politiques de gestion de stocks ont été introduites.

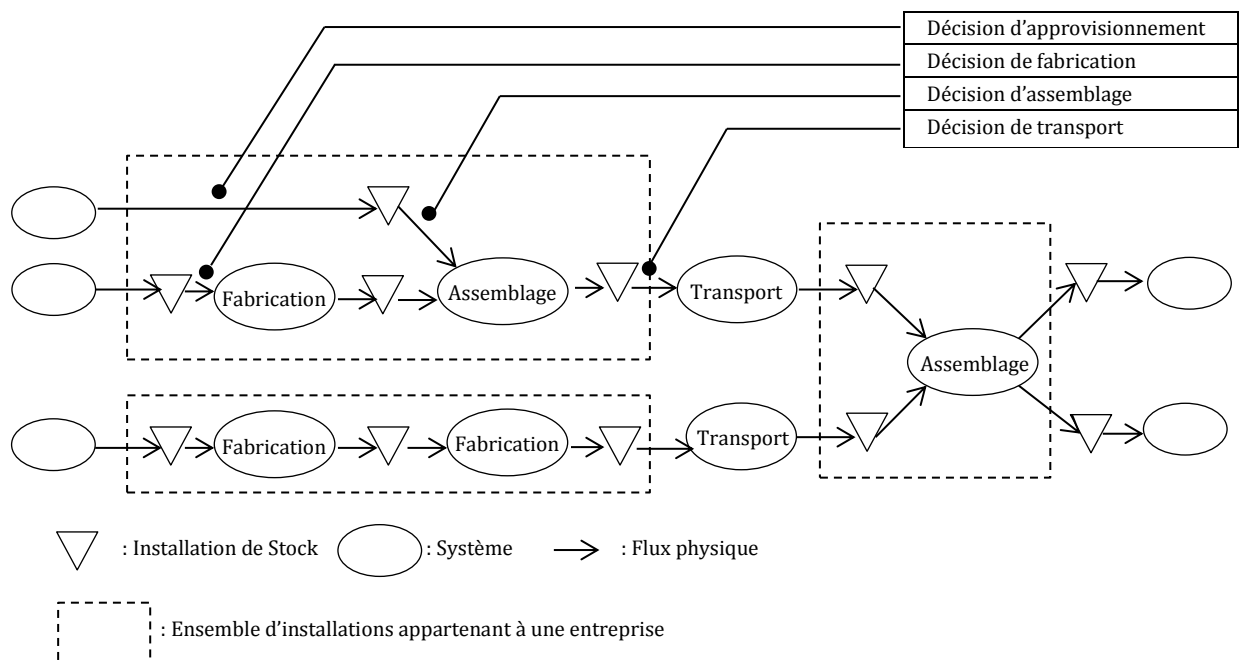
### **1.1.1 Les différentes politiques classiques de gestion de stocks**

Les politiques de gestion de stocks classiques visent à assurer la gestion d'un ou plusieurs stocks en passant des ordres d'approvisionnement pour les réapprovisionner. Le délai d'approvisionnement est l'intervalle de temps qui sépare le moment où un ordre de réapprovisionnement est passé et la réception des composants commandés. Il est composé des délais de lancement de la commande, des délais d'approvisionnement, du transport et de la mise en stock. La **Figure 1.1** représente les différentes décisions de pilotage de flux dans une chaîne logistique ([Arda, 2008]).

Un stock est généralement défini par son niveau et par les variations qu'il subit dans le temps. Il y a deux catégories de politiques classiques de gestion de stocks : les politiques à quantité fixe et à période de réapprovisionnement variable et les politiques de gestion de stocks à période fixe et quantité d'approvisionnement variable.

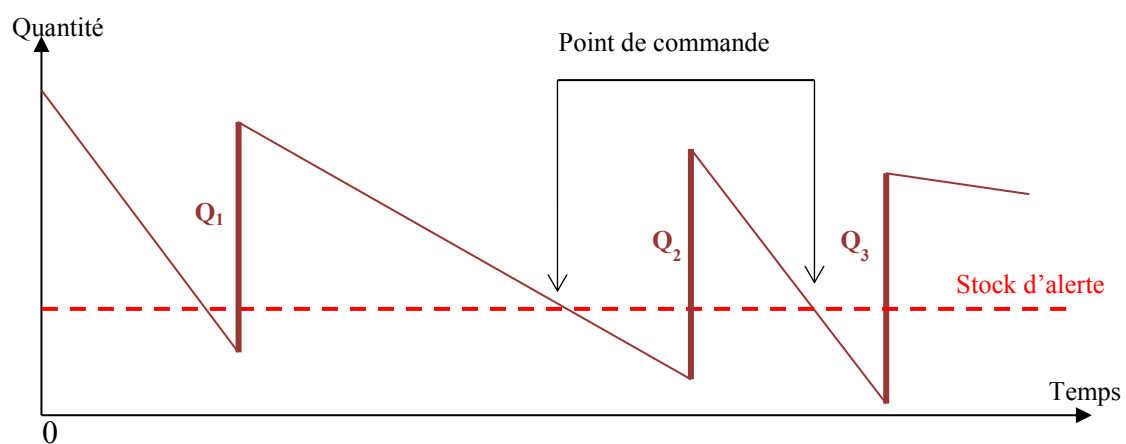
Pour chacune de ces politiques, il existe une variété extrêmement importante de modèles suivant les hypothèses retenues. Cependant, pour les définir, c'est les réponses aux questions suivantes qui permettent de les définir : « quand faut-il s'approvisionner ? » et « combien faut-il commander ? ». Voici les principales politiques qui répondent à ces deux questions :

- **Point de commande** : la technique du point de commande est une méthode de réapprovisionnement à dates variables et quantités fixes (voir **Figure 1.2**). L'approvisionnement est déclenché lorsque l'on observe que le stock détenu est en dessous d'un niveau que l'on appelle le point de commande. Ce point ainsi que la quantité de réapprovisionnement sont deux paramètres à définir. L'avantage majeur de cette approche est sa simplicité. Mais elle peut tout de même engendrer, dans le cas d'une demande ou d'un délai d'approvisionnement aléatoire, un stockage important et inutile de composants et de matières ([Mollet et al., 2006]).



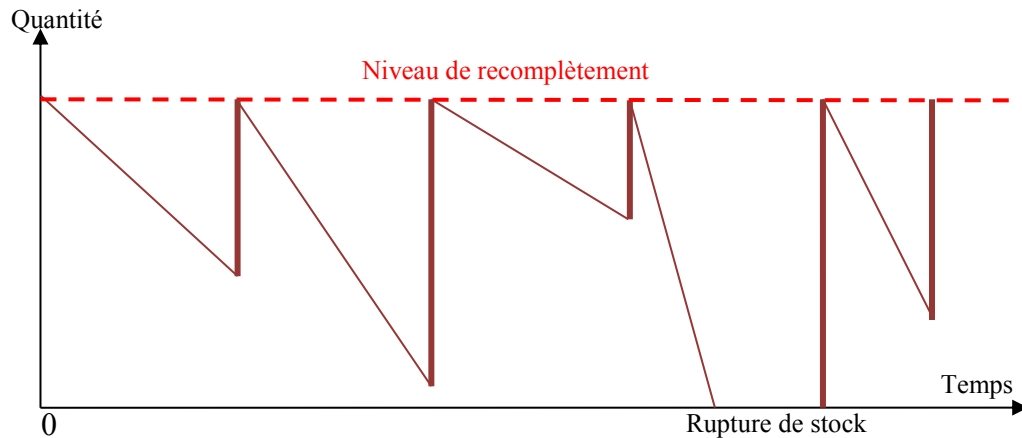
**Figure 1.1 : Pilotage de flux dans une chaîne logistique**

- Gestion calendaire : l'approvisionnement du stock est déclenché à intervalle régulier, et l'on parle alors de gestion calendaire des stocks.
- Gestion calendaire conditionnelle : Ce cas mélange les deux techniques précédentes, en effet la commande est susceptible d'être passée à un intervalle régulier  $T$ , à condition que le niveau de stock soit inférieur à un point de commande  $s$ .



**Figure 1.2** : Gestion à point de commande

- Quantité fixe de commande : la commande porte sur une quantité fixe de commande. Lorsque la demande est stationnaire, le modèle de Wilson est la méthode la plus ancienne et par excellence la plus simple à utiliser pour déterminer cette quantité. Néanmoins, lorsque la demande est dynamique, la quantité de commande n'est pas constante mais sa détermination peut résulter d'un calcul de programmation dynamique.
- Niveau de reapprovisionnement : la quantité commandée est calculée en fonction du stock restant. Elle est commandée à une date fixe. Le niveau de reapprovisionnement est calculé de manière à ce qu'il n'y ait pas de rupture de stock entre la date de la commande et la date de la livraison (voir **Figure 1.3**).



**Figure 1.3 :** Niveau de reapprovisionnement

Nous pouvons nous référer aux recueils bibliographiques sur les politiques de gestion de stocks classiques présentés par [Silver and Peterson, 1985], [Zipkin, 2000], [Giard, 2003] ou encore [Babai, 2005].

Dans la section qui suit, nous nous intéresserons particulièrement à la politique de planification de type MRP.

## **1.2 La politique de planification de type MRP (gestion de stocks dépendants)**

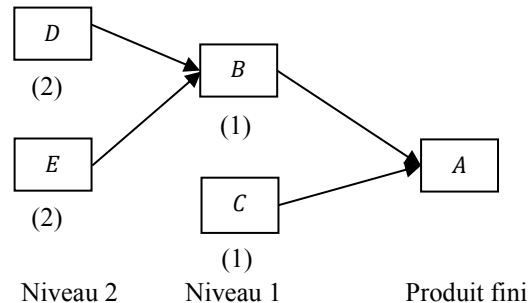
Toute entreprise appelée à fournir des biens ou des services est amenée à respecter les délais exigés par le client et trouver une adéquation de la charge aux capacités de production. Ces contraintes dites de « planification et d'ordonnancement de la production » ont donné lieu à de nombreux travaux et à l'élaboration de méthodes très diverses. Parmi celles-ci, la méthode MRP tient une place de choix. Elle est implantée de fait dans la très grande majorité des entreprises industrielles puisqu'elle s'adapte à la variation du volume d'activité de l'entreprise, et aide à la prise de décision en cas de surcharge de travail dans les différents postes à charge. Nous pouvons nous référer aux travaux et aux définitions que donne [Dolgui and Proth, 2010] sur le MRP1 et le MRP2.

Dans le MRP1, qui date des années soixante-dix, on intègre la gestion et la planification des moyens de production. Il devient une méthode de gestion et de planification de production en flux poussé basé sur les nomenclatures de produits et la prévision des ventes. Pour chaque produit fini, à partir du besoin brut, on obtient le besoin net. Grâce à la nomenclature (de combien de composants  $X$  a-t-on besoin pour fabriquer le produit fini  $Y$ ?), on peut remonter au nombre de composants nécessaires pour répondre à la prévision des ventes des produits finis.

Le MRP 2 est une adaptation du MRP1 qui prend en compte les ressources humaines et la capacité. Il a pour rôle principal la planification de la production en fonction des ressources humaines et matérielles, de la matière première et du temps. Il se compose de divers processus, le Plan industriel et Commercial, le Plan Directeur de Production, le Calcul des Besoins Nets et le Pilotage Ateliers. Tous ces processus réunis constituent sa logique et sa complexité, ce qui lui permet d'occuper une place importante dans l'entreprise industrielle.

### **Exemple introductif:**

Pour chaque produit fini et pour chaque période de l'horizon de planification, le système MRP permet de calculer les besoins en composants. Les produits sont traités par niveau de nomenclature croissant pour que le calcul des besoins, pour chaque composant présent dans différents produits aux différents niveaux, se fasse en cascade. Nous numérotions l'ensemble des sommets de 1 à  $n$  de manière à ce que tout sommet parent ait un numéro inférieur aux numéros de ses enfants, et niveau par niveau de gauche à droite. Prenons un exemple d'une entreprise qui fabrique un produit fini  $A$  dont la nomenclature est présentée dans la **Figure 1.4** :



**Figure 1.4 :** Nomenclature du produit fini

Cette nomenclature nous indique que le produit fini est composé de deux composants : *B* et *C*, le composant *B* est assemblé à partir de deux composants *D* et de deux composants *E*. Les coefficients multiplicateurs représentent la quantité d'un composant fils nécessaire pour la fabrication d'un composant père. Supposons que le PDP pour le produit fini se présente comme dans le **Tableau 1.1** sur un horizon de 4 périodes:

**Tableau 1.1 :** Plan Directeur de Production

Période	6	7	8	9
Approvisionnements planifiés	100	50	100	200

Pour disposer de chacun des approvisionnements planifiés aux dates prévues, il sera nécessaire de connaître leur niveau de stocks et leur délai d'approvisionnement en composant, et de planifier le lancement de la fabrication en conséquence (voir le ) :

**Tableau 1.2 :** Délais d'approvisionnement et stocks disponibles

Composant	A	B	C	D	E
Délais d'approvisionnement (LT)	1	2	2	1	1
Stocks disponibles	20	0	10	100	100

Le lancement de la fabrication ou de l'ordre d'approvisionnement d'un composant crée des besoins en composants fils. Il sera nécessaire d'explorer la nomenclature pour modifier les calculs des composants de niveau inférieur (voir le **Tableau 1.3**).

**Tableau 1.3 :** MRP sur les semaines 0 à 9

PDP										
Période	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Demande (A)							100	50	100	200
<b>Produit fini : A (LT=1)</b>							↓			
Besoins Bruts							100	50	100	200
Stocks Disponibles	20	20	20	20	20	20	20	0	0	0
Besoins Nets	-20	-20	-20	-20	-20	-20	80	50	100	200
Ordres Planifiés						80	50	100	200	
<b>Composant : B (LT=2)</b>							Quantité=1		LT=1	
Besoins Bruts						80	50	100	200	
Stocks Disponibles						0	0	0	0	
Besoins Nets						80	50	100	200	
Ordres Planifiés				80	50	100	200			
<b>Composant : C (LT=2)</b>							Quantité=1			
Besoins Bruts						80	50	100	200	
Stocks Disponibles	10	10	10	10	10	0	0	0	0	
Besoins Nets	-10	-10	-10	-10	-10	70	50	100	200	
Ordres Planifiés				70	50	100	200			
<b>Composant : D (LT=1)</b>							LT=2		Quantité=2	
Besoins Bruts				160	100	200	400			
Stocks Disponibles	100	100	100	0	0	0	0			
Besoins Nets	-100	-100	-100	60	100	200	400			
Ordres Planifiés			60	100	200	400				
<b>Composant : E (LT=1)</b>							Quantité=2			
Besoins Bruts				160	100	200	400			
Stocks Disponibles	120	120	120	0	0	0	0			
Besoins Nets	-120	-120	-120	40	100	200	400			
Ordres Planifiés			40	100	200	400				

Les besoins bruts du produit fini proviennent du PDP. Les besoins nets sont les différences entre les besoins bruts et les stocks disponibles. Les ordres planifiés dépendent des délais d'approvisionnement qui sont indiqués dans la deuxième colonne du tableau de calcul ( $d_i$ ). Dans une situation idéale, ces ordres planifiés couvrent exactement les besoins nets.

Comme on peut le constater sur l'exemple, la logique de calcul MRP est très simple. Dans un cas réel, une entreprise gère plusieurs produits finis et des milliers de composants. Une grande masse de données est à gérer et un nombre important de calculs à effectuer. A partir de cet exemple, nous pouvons faire une analyse rapide des limites du système MRP classique.

Ces limites sont, généralement, dues aux variations de la demande et aux aléas de fabrication et d'approvisionnement. Dans la pratique, un certain nombre de contraintes et de facteurs externes et internes peuvent perturber la chaîne logistique ; et alors les ordres planifiés ne correspondront aux besoins calculés.

Par définition, ces contraintes et ces facteurs, ce que nous appelons par la suite les sources d'incertitudes, sont des événements imprévisibles qui perturbent les opérations et la performance d'une entreprise ([Koh et al., 2002]). Ils causent soit des ruptures de stock en composants ou en produit fini, à l'origine d'une baisse du taux de service, soit une augmentation du niveau de stocks et par conséquent, des coûts de possession ([Ould Louly et al., 2008b]). Ces incertitudes peuvent être dues, par exemple (1) aux problèmes de transport qui perturbent les délais d'approvisionnement, (2) aux problèmes liés à la production qui ralentissent la cadence de fabrication, et (3) à la non fiabilité des prévisions de la demande.

Dans le chapitre 2, nous allons examiner ces aléas et ces incertitudes en s'appuyant particulièrement sur les revues de l'état de l'art présentées dans [Ben Ammar et al., 2013a], [Dolgui and Prodhon, 2007], [Peidro et al., 2009] et [Wazed et al., 2009].



## Chapitre 2 : Utilisation de techniques MRP sous incertitudes

Le système MRP est conçu pour un environnement stable, or de nos jours, la chaîne logistique est devenue très vulnérable et loin d'être déterministe ([Dolgui and Prodhon, 2007]). L'entreprise doit s'adapter aux changements des conditions économiques (évolution des coûts, augmentation de prix des matières premières, etc.), aux problèmes techniques (pannes machine, capacité limitée, retard de transports, etc.), aux contraintes concurrentielles (rapport qualité/prix attractif, la veille technologique, choix des fournisseurs, etc.).

Plusieurs revues de littérature fournissent des réflexions et des méthodes qui ont été développées afin de paramétrer le système MRP dans un environnement incertain. Par exemple [Koh et al., 2002], [Mula et al., 2006b], [Dolgui and Prodhon, 2007], [Damand et al., 2011] et [Damand et al., 2013b] ont montré qu'ils existent différentes techniques (délais de sécurité, stocks de sécurité et techniques de lotissement, etc.) qui peuvent être utilisées pour faire face à ces incertitudes.

Selon [Dolgui and Prodhon, 2007], seulement 19% des articles traités prennent en compte l'incertitude de la demande et des délais d'approvisionnement dans la méthode MRP. En moyenne, 60% d'articles analysent une seule source d'incertitude, 30% deux sources et seulement 10% plus de trois sources d'incertitudes à la fois. Les auteurs mettent en évidence quatre catégories d'incertitudes : la catégorie 1 peut être expliquée par des modifications des dates de livraison exigées par le client. La catégorie 2 est le résultat de la variabilité de la demande. La catégorie 3 peut être due aux aléas du délai d'approvisionnement ou de production. Les incertitudes sur les quantités livrées constituent la 4<sup>ème</sup> catégorie d'incertitudes (voir **Figure 2.1**). Les auteurs considèrent que l'instauration de stocks de sécurité et/ou de délais de sécurité et le choix d'un horizon de planification sont des techniques possibles pour faire face à ces incertitudes.

[Damand et al., 2011] et [Damand et al., 2013a] recensent 78 articles et 7 états de l'art, s'étalant de 1976 à 2010. Ils construisent la liste exhaustive des paramètres d'action (PA) pour faire face à ces incertitudes et des indicateurs de performances (IP), et analysent les relations PA-IP. Les règles de lotissement, le calcul de temps de cycle planifié et les règles

d'ordonnancement sont les PA les plus étudiés. Les IP les plus utilisés sont : coût total, instabilité du système, taux de service, niveau de stock. Les auteurs remettent en question les modèles existants, ils constatent que : (1) trop de paramètres sont souvent fixés, (2) plusieurs études considèrent un seul type d'incertitude alors qu'en réalité il existe d'autres incertitudes, (3) les conditions environnementales ne sont pas toujours réalistes (structure de produit mono-niveau, prévision fiable, etc.), (4) peu d'études prennent en compte des contraintes de capacité, (5) les modèles sont trop simples et seulement 6 travaux sur 78 sont inspirés de cas industriels.

(1) Dates de commandes incertaines

Période	1	2	3	4	5
Besoins Bruts	0	0	20	15	0
Stock final	20	20	20	0	0
Besoins nets	-20	-20	0	15	0
Ordres Planifiés		15			

(3) Dates de livraisons incertaines

(2) Demande incertaine

(4) Quantité livrée incertaine

**Figure 2.1** : Les 4 principales catégories d'incertitudes ([Dolgui and Prodhon, 2007])

Jusqu'ici nous avons défini les incertitudes au sens large du terme. Lorsque l'on cherche à étudier les incertitudes dans un système MRP, il est préférable de bien différencier différents types de chaîne d'approvisionnement. Pour ce type de problème, trois types de structures sont identifiés dans la littérature: les systèmes simples (un seul fournisseur d'un seul type de composant), les chaînes d'approvisionnement à structure linéaire et les systèmes d'assemblage. Nous distinguons, pour les deux derniers types de système, les structures à un niveau et à plusieurs niveaux. Nous notons aussi que, dans la littérature, il y a une distinction entre les modèles mono-périodes et les modèles multi-périodes.

## **2.1 Chaînes d'approvisionnement à structure linéaire**

Plusieurs travaux existent sur la modélisation des chaînes d'approvisionnement à structure linéaire dans un environnement incertain. Dans la littérature, nous distinguons les chaînes à un niveau et à plusieurs niveaux.

[Weeks, 1981] a modélisé mathématiquement le cas d'une structure linéaire à un seul niveau et un seul type de composant. L'indicateur de performance étudié est le coût total moyen composé de coût de stockage et de coût de rupture. En effet, l'auteur a démontré que le modèle mathématique est équivalent au modèle « Newsboy » pour le cas d'une demande fixe et de délais d'approvisionnement aléatoires non nuls.

La variabilité des délais a également été traitée par exemple par [Whybark and Williams, 1976]. En minimisant les coûts de stockage et en maximisant le taux de service, les auteurs ont démontré que, pour une chaîne d'approvisionnement à structure linéaire, l'utilisation du délai de sécurité est plus efficace quand les délais d'approvisionnement sont incertains et que les stocks de sécurité sont à introduire quand les incertitudes sont liées aux quantités.

Cependant, [Grasso and Taylor, 1984], ont affirmé qu'il était préférable d'utiliser les stocks de sécurité pour les deux cas : incertitudes de la demande et incertitudes des délais d'approvisionnement. Ils ont analysé quatre facteurs (délais, stocks et délais de sécurité, technique de lot-sizing, coûts de rupture et de stockage). Trois produits de nomenclature à cinq niveaux chacun ont été étudiés. Les auteurs ont déduit de leur analyse que les coûts de gestion dans un système MRP sont essentiellement composés des coûts engendrés par ces quatre facteurs.

[Yano, 1987b] a proposé une approche analytique pour le cas d'une structure linéaire à deux niveaux. Le critère étudié est la somme des coûts de stockage des composants et le coût de rupture de produit fini. Les délais d'approvisionnement suivent une loi de distribution continue quelconque mais connue. Dans [Yano, 1987c], un problème similaire a été traité. Un coût de retard a été considéré, il représente le coût de replanification si le composant est disponible après la date de livraison prévue. La somme de trois indicateurs

de performance suivants est minimisée : (1) le coût moyen de stockage des composants, (2) le coût de retard à chaque niveau et (3) le coût de rupture en produit fini. Seules les chaînes logistiques à moins de trois niveaux ont été étudiées étant donné que les chaînes logistiques à plus de trois niveaux sont difficiles à modéliser analytiquement. [Elhafsi, 2002] a généralisé cette approche en proposant un modèle analytique basée sur la récursivité qui permet d'étudier les structures linéaires à plusieurs niveaux. La convexité de la fonction a été démontrée et une heuristique basée sur la programmation dynamique a été développée pour trouver une solution approchée dans un temps de calcul acceptable.

[Mohebbi, 2003] a modélisé ce problème avec une chaîne de Markov à temps continu. La demande suit une loi de Poisson et celle qui n'est pas satisfaite est perdue. Le délai d'approvisionnement suit une loi d'Erlang et à tout point de l'échelle du temps, les fournisseurs sont soit disponibles soit ne le sont pas en tenant compte de cela. Les approvisionnements ne se font pas de manière continue ce qui implique des variations importantes de niveau de service. La méthode de gestion de stocks utilisée est à point de commande avec une quantité fixe de commande ( $s, Q$ ). L'auteur a présenté des expressions analytiques exactes de la fonction « coût ».

[Kim et al., 2004] ont développé un modèle approché pour un seul produit fini et pour le cas où la demande est connue et fixe, Le délai d'approvisionnement suit une loi d'Erlang. L'indicateur de performance est le coût total moyen qui est composé de coût de passation de commande, de coût de rupture et de coût de stockage. La solution approchée est comparée à la solution optimale pour les cas où : (1) les informations concernant les délais d'approvisionnement sont disponibles et, (2) aucune information, au préalable, n'est disponible. La solution approchée proposée est aussi simple que la solution proposée par le modèle de la quantité économique (*EOQ*). Le taux de précision est de 99,41% lorsque l'information préalable sur la répartition des délais de livraison est disponible, et de 97,54 à 99,09% lorsqu'aucune information n'est disponible au préalable

Les mêmes auteurs ont étudié, par la suite, ce que l'on appelle l'effet du coup de fouet dans une chaîne logistique à structure linéaire ([Kim et al., 2006]). La demande a été supposée aléatoire et les délais d'approvisionnement sont des variables indépendantes et

identiquement distribuées pour tous les niveaux et toutes les périodes. Une méthode statistique a été utilisée pour montrer l'influence de l'incertitude des délais d'approvisionnement sur la variation de la demande pour les niveaux intermédiaires. Les auteurs concluent que la variabilité des délais amplifie encore plus l'effet de coup de fouet et que le partage d'informations permet de contrôler l'effet de coup de fouet (une augmentation linéaire en fonction du nombre de niveaux dans la chaîne linéaire alors que dans le cas contraire, cette augmentation est exponentielle).

[He et al., 2005] ont traité le cas où le délai d'approvisionnement est aléatoire et borné, la demande a été supposée constante et connue et la méthode de gestion de stocks utilisée est à quantité économique optimale (*EOQ*). Les auteurs ont souligné que le coût de stockage total varie linéairement en fonction de l'incertitude sur les délais.

[Namit, 2007] a traité le même problème que [Weeks, 1981]. La demande et le délai ont été supposés aléatoires sur un horizon de planification d'une année. L'objectif de cette étude était de déterminer le point de commande (*R*) et le stock de sécurité (*S*) qui minimisent la somme de coût annuel de stockage et de coût annuel de lancement d'ordre. L'auteur a proposé une approche analytique pour optimiser le coût annuel total sous la contrainte de niveau de service.

[Chaharasooghi and Heydari, 2010] ont analysé l'effet de la variance et de la moyenne des délais d'approvisionnement sur la performance de la chaîne logistique. La demande était fixe et connue, les caractéristiques des délais d'approvisionnement étaient les suivantes : (1) la variance des délais d'approvisionnement (*LTV*), (2) les délais d'approvisionnement moyens (*LTM*). Les auteurs de cet article considèrent que le délai d'approvisionnement est l'un des principaux facteurs qui affectent la performance de la chaîne logistique et rendent le processus de planification plus complexe. Ils ont étudié, par simulation, une chaîne logistique à quatre maillons. Une analyse a permis d'étudier les corrélations entre *LTM* et *LTV* d'un côté et les indices de performance de la chaîne logistique de l'autre (l'effet du coup de fouet, le niveau de stock, le niveau de rupture, le nombre de rupture). Selon ces auteurs, la fiabilité du processus de planification est en corrélation avec l'incertitude de délais de livraison. Les conclusions suivantes ont également été faites (1) la *LTV* a plus

d'effets sur la performance de la chaîne logistique que la LTM. (2) la réduction des délais d'approvisionnement peut avoir un effet contradictoire sur les différents indices de performance de la chaîne. Par exemple une réduction du LTM réduit l'effet du coup de fouet, mais augmente le nombre de ruptures. Ces auteurs ont aussi proposé une analyse des effets des délais d'approvisionnement sur d'autres mesures de performance.

Nous notons que la littérature traitant les chaînes logistiques à structure linéaire peut être classifiée en fonction des sources d'incertitudes. La plupart des modèles proposés sont souvent dédiés à une seule source d'incertitude, et les lois que la demande ou les délais d'approvisionnement suivent sont généralement connues et particulières. Ces modèles sont difficiles à généraliser aux cas de systèmes linéaires multi-niveaux ou des systèmes d'assemblage.

Lorsque l'incertitude est liée aux délais d'approvisionnement, les modèles analytiques existants permettent au mieux de traiter les chaînes linéaires à 3 niveaux maximums. Les systèmes à plusieurs niveaux sont généralement traités par la simulation. La source d'incertitude est généralement modéliser par une variable aléatoire continue pour s'approcher des modèles de gestion de stocks classiques. Cependant, dans les systèmes de planification d'approvisionnement de type MRP, le temps (nombre de périodes) et les variables de décision (taille de lot, temps de cycle planifié) sont des entiers ([Hnaïen, 2008]).

Afin de s'approcher de la méthode MRP, nous allons étudier les modèles à temps discret et à variables de décisions discrètes. Nous allons étudier tout particulièrement des modèles pour des systèmes d'assemblage.

## **2.2 Systèmes d'assemblage**

L'optimisation d'une chaîne logistique pour l'assemblage d'un produit à partir de  $n$  composants est un sujet de recherche connu ([Axsäter, 2006]). La plupart des travaux se focalisent sur le cas d'une demande aléatoire, alors que les problèmes avec délais d'approvisionnement aléatoires sont peu étudiés ([Mula et al., 2006b]).

Dans toutes les revues de littérature, nous pouvons distinguer plusieurs axes d'études : (1) assemblage d'un seul ou de plusieurs produits finis, (2) des modèles mono-période, ou des modèles multi-période et (3) des systèmes d'assemblage à un ou deux niveaux. Nous notons, que la complexité dans les systèmes d'assemblage est due à la dépendance entre les composants c'est-à-dire que l'assemblage n'est pas faisable si tous les composants nécessaires ne sont pas disponibles. Cette complexité est aussi due à la dépendance entre les niveaux : la disponibilité d'un composant dépend nécessairement de la disponibilité de tous les composants qui le composent. Il y a également une dépendance entre les stocks des périodes consécutives si une étude est faite pour le cas multi-période.

Dans la partie qui suit, pour les cas de : (1) délais d'approvisionnement incertains et demande déterministe (2) délais d'approvisionnement et demande incertains, (3) demande incertaine, et enfin, (4) capacité incertaine, nous analysons la littérature scientifique existante.

### **2.2.1 Délais d'approvisionnement incertains et demande déterministe**

L'incertitude sur les délais est peu étudiée dans la littérature. [Gupta and Brennan, 1995] ont montré que l'incertitude sur les délais influence les coûts de productions. [Ho and Ireland, 1998] ont conclu que l'incertitude sur le temps crée une instabilité même si une bonne méthode de lotissement est utilisée ou si l'on dispose d'information sur la demande. [Bragg, 1999] a prouvé que l'incertitude sur les délais influence considérablement les niveaux de stocks.

Généralement, la formulation mathématique des problèmes multi-périodes sous incertitude des délais d'approvisionnement est très complexe. La plupart des études trouvées dans la littérature traitent les modèles mono-période qui n'ont pas besoin de prendre en considération la dépendance entre les stocks de différentes périodes successives.

[Yano, 1987a] traite le système d'assemblage à deux niveaux, mono-période, avec un seul type de composants au premier niveau et deux types de composants au deuxième niveau. La distribution des délais d'approvisionnement a été supposée continue quelconque mais

connue. L'indicateur de performance est la somme du coût de stockage et du coût de rupture. Dans le modèle proposé, les délais de sécurité peuvent être considérés négatifs dans le cas où le coût de possession unitaire de composants est largement supérieur au coût de rupture unitaire.

[Kumar, 1989] propose un modèle mono-période pour le cas de systèmes d'assemblage à un niveau. Le produit fini est assemblé à partir de plusieurs composants. Les délais d'approvisionnement ont été supposés aléatoires mais la demande et la date de livraison ont été considérées connues. L'objectif est de trouver les dates exactes de lancement des ordres d'approvisionnement aux fournisseurs qui minimisent le coût total composé du coût de stockage et du coût de rupture.

Un problème similaire a été traité par [Chu et al., 1993], les auteurs ont supposé que les délais d'approvisionnement étaient aléatoires et suivaient des lois continues quelconques mais connues. Le critère à minimiser est l'espérance mathématique de la somme du coût de rupture en produit fini et du coût de stockage des composants. En utilisant la propriété de convexité, La fonction « coût total moyen » a été démontrée convexe et un algorithme itératif a été proposé.

[Tang and Grubbström, 2003] ont utilisé la transformée de Laplace pour modéliser un problème mono-période similaire à celui analysé dans [Yano, 1987a]. Le système d'assemblage considéré est à deux niveaux, avec un délai d'approvisionnement aléatoire discret, une demande supposée fixe et une date de livraison connue. L'objectif est de minimiser la somme du coût de rupture en produit fini et du coût de stockage des composants.

Pour la planification des systèmes d'assemblage multi-période, [Dolgui et al., 1995] et [Dolgui, 2002] ont proposé un modèle analytique. La demande a été supposée constante, les délais d'approvisionnement des composants sont aléatoires, et la politique Lot pour Lot est utilisée. Il y a plusieurs types de produits à assembler à partir de plusieurs types de composants. La fonction objectif est la somme du coût de stockage des composants et du coûts de rupture en produit fini. Une approche basée d'une part sur un couplage de la



simulation avec un modèle de programmation linéaire en nombres entiers et des heuristiques a été développée. Le modèle proposé calcule la quantité de composants à commander au début de chaque période et la quantité à assembler pour chaque produit. [Proth et al., 1997] étudient le même problème dans le cas où une heuristique détermine les composants à commander et les produits à assembler.

[Gurnani et al., 1996] ont étudié un problème similaire sur deux périodes de planification. Les composants commandés sont livrés durant la même période avec une probabilité  $p$  ou à la période suivante avec la probabilité  $1-p$ . Une règle optimale de détermination de la quantité à commander pour chaque type de composant est proposée. La généralisation de ce modèle, au cas multi-période et multi-composant paraît difficile car le nombre de réalisations possibles croît de manière exponentielle.

Un modèle markovien pour décrire les approvisionnements en composants avec des délais aléatoires a été proposé par [Dolgui and Ould Louly, 2002]. Le modèle de planification étudié est multi-période pour des systèmes d'assemblage à un seul niveau. L'indicateur de performance est la somme des coûts de possession pour le stockage de composants et de retard. Les délais d'approvisionnement de tous les types de composants suivent la même loi de probabilité, la capacité a été supposée infinie et la demande est constante et celles non satisfaites sont différées. La politique d'approvisionnement considérée est Lot pour Lot.

Les mêmes auteurs présentent dans [Ould Louly and Dolgui, 2002] un cas particulier du problème. Le produit fini est assemblé à partir de plusieurs types de composants, les différents délais d'approvisionnement en composant suivent la même distribution de probabilité, les coûts de stockage des différents composants et les quantités commandées à chaque période sont identiques. Le modèle prend en compte les interdépendances, à chaque période, entre les niveaux de stocks des différents composants. Ce système peut être décrit par une généralisation du modèle Newsboy. Le modèle proposé est généralisé à son tour pour le cas de la politique d'approvisionnement à couverture fixe dans [Ould Louly and Dolgui, 2004] et pour le cas de la politique d'approvisionnement au nombre de périodes

fixe (POQ policy) sous la contrainte de niveau de service dans [Ould Louly and Dolgui, 2013].

Dans [Ould Louly et al., 2008a] , le problème de [Ould Louly and Dolgui, 2002] est généralisé : (1) les délais d'approvisionnement en composants ne suivent pas la même loi de probabilité, et (2) les coûts de stockage des composants ne sont pas égaux. Les auteurs ont développé une procédure par séparation et évaluation (PSE) utilisant des propriétés de dominance et des bornes supérieures et inférieures de la fonction « objectif » afin de trouver la solution optimale. Cette étude a été complétée par [Ould Louly and Dolgui, 2009] où les auteurs remplacent le coût de rupture en produit fini par un niveau de service et minimisent le coût de stockage des composants sous la contrainte de niveau de service. Ces rajouts permettent d'analyser le cas où le coût de rupture est difficile à mesurer.

[Chauhan et al., 2009] ont traité le même problème mais pour le cas mono-période et à un seul niveau. Le produit fini est composé de  $n$  composants, la demande est considérée fixe, les délais d'approvisionnement sont des variables aléatoires suivant une loi quelconque dont la fonction de répartition est connue. Le but est de déterminer les dates de lancement des commandes qui minimisent le coût total moyen. Le coût total moyen est composé de trois parties : (1) le coût de stockage des composants jusqu'à l'arrivée du dernier composant, (2) le coût de stockage des composants entre  $T$ , la date de début d'assemblage du produit fini, et  $Z$  la date de livraison souhaitée, et (3) le coût de rupture en produit fini. Le coût total moyen est déterminé par simulation. L'idée est de diminuer le coût de stockage des composants étape par étape en utilisant un algorithme de recuit simulé. Les auteurs ont fait une comparaison entre les solutions générées par l'algorithme proposé et la solution exacte. Ils ont montré que leur algorithme est performant puisque la fraction d'erreur : ((la solution exacte - la solution trouvée par l'algorithme) / solution exacte), est très proche de 0.

Dans [Hnaïen et al., 2009] un système d'assemblage à deux niveaux a été étudié pour le cas mono-période et pour toutes les autres hypothèses. Un algorithme génétique a été proposé pour résoudre des problèmes à plus de 60 variables de décisions que la PSE ne pouvait pas résoudre.

[Hnaïen et al., 2010] ont étudié le problème de planification d'approvisionnement et gestion de stocks pour le cas d'assemblage à deux niveaux. L'entreprise commande les composants de niveau 2 chez des fournisseurs extérieurs avant de lancer l'assemblage des composants de niveau 1 et puis, à partir de composants de niveau 1, le produit fini est assemblé. La demande est supposée fixe et connue, les délais d'approvisionnements en composants sont supposés aléatoires. Pour déterminer les dates optimales de lancement d'ordres d'approvisionnement aux fournisseurs, deux critères sont étudiés : (1) minimiser le coût total composé du coût de stockage de composants de niveau 1 et 2, (2) maximiser le taux de service lié au produit fini (c'est la probabilité de ne pas être en rupture en produit fini). C'est donc un problème bi-objectif, un algorithme d'optimisation multi-objectif (NSGA-II) a été utilisé, et les résultats obtenus sont comparés aux ceux de [Ould Louly et al., 2008b].

[Sakiani et al., 2012] ont étudié à leur tour le même problème, ils ont développé, pour l'optimisation, un algorithme génétique à sélection par tournoi.

[Fallah-Jamshidi et al., 2011] ont étudié le problème de planification des systèmes d'assemblage à deux niveaux en prenant en compte les aléas des délais d'approvisionnement, la demande était considérée fixe et connue. Les auteurs ne minimisent pas le coût total (qui est égal à la somme du coût de stockage des composants au niveau 2 et le coût de rupture en produit fini) mais ils cherchent plutôt à trouver un bon compromis entre le coût de stockage et le coût de rupture. Ils proposent un algorithme génétique ainsi qu'une procédure de recherche locale basé sur l'algorithme d'« Electromagnetism like Mechanism » permettant d'accélérer la convergence de l'algorithme pour ce problème. Ces deux algorithmes sont utilisés pour résoudre ce problème bi-objectif en déterminant l'ensemble des solutions optimales de Pareto. Une comparaison avec le NSGA-II de [Hnaïen et al., 2009] est également présentée.

Le **Tableau 2.1** récapitule les études introduites dans la littérature concernant les systèmes d'assemblage en fonction : (1) du nombre de niveaux, (2) des critères utilisés ( $H_c$ : coût de stockage,  $T_c$  : coût de rupture,  $S_l$  : taux de service ), et (3) du type de système ( $S_{prod}$  : mono-produit,  $M_{cp}$ : multi-composant,  $M_{per}$  : multi-période,  $S_{per}$  : mono-période).

**Tableau 2.1 : Incertitudes des délais d'approvisionnement**

Auteurs	Nombre de Niveaux	Critère	Type de système	Commentaire
[Yano, 1987a]	2	$H_c, T_c$	S-prod, M-cp, single-period	Programmation non linéaire
Kumar (1989)	1			Délais d'appro suivent des cas particuliers de distribution de probabilité
[Chu et al., 1993]	1			Algorithme itératif
[Dolgui et al., 1995], [Dolgui, 2002]	1		Multi-product, M-cp, M-per	PLNE, simulation, politique Lot pour Lot (L4L), simulation, heuristiques
[Proth et al., 1997]	1		S-prod, M-cp, M-per	Modèle continue, une heuristique
[Hegedus and Hopp, 2000]	2	$H_c, S_l$	S-prod, M-cp, single-period	Méthode d'optimisation combinatoire
[Dolgui and Ould Louly, 2002]	1	$H_c, T_c$	S-prod, M-cp, M-per	Markov, Newsboy, L4L, Les délais d'appro de tous les types de composants suivent la même loi de probabilité
[Ould Louly and Dolgui, 2002], [Ould Louly and Dolgui, 2003]	1			Modèle Newsboy, le même coût de stockage pour tous les composants
[Tang and Grubbström, 2003]	2		S-prod, S-per, 2-cp	Transformée de Laplace
[Ould Louly and Dolgui, 2004]	1		S-prod, M-cp, M-per	Markov, Newsboy, POQ policy, Modèle Newsboy, le même $H_c$ pour tous les composants, politique d'approvisionnement à couverture fixe
[Axsäter, 2005]	2, 3		S-prod, M-cp, S-per	Technique de décomposition, simulation
[Ould Louly and Dolgui, 2009]	1	$H_c, S_l$	S-prod, M-cp, M-per	EOQ policy, PSE
[Ould Louly et al., 2008a]	1			PSE
[Ould Louly et al., 2008b],				Généralisation de [Ould Louly and Dolgui, 2002],
[Hnaïen et al., 2009]	2	$H_c, T_c$	S-prod, M-cp, S-per	Algorithme génétique (AG), PSE
[Chauhan et al., 2009]	1	$H_c, S_l$		Recuit simulé, modèle continu
[Hnaïen et al., 2010]	2	$H_c, S_l$		AG, multi-objectif, sélection élitiste
[Fallah-Jamshidi et al., 2011]	2	$H_c, T_c$		Approche hybride, algorithme génétique, algorithme d'Electromagnetism-like Mechanism
[Ould Louly and Dolgui, 2013]	1	$H_c, S_l$	S-prod, M-cp, M-per	POQ Policy, nouvelle généralisation du modèle Newsboy
[Sakiani et al., 2012]	2	$H_c, S_l$	S-prod, M-cp, S-per	AG multi-objectif, sélection par tournoi

Dans [Ben Ammar et al., 2012], un modèle de simulation a été couplé avec le NSGA-II de [Hnaïen et al., 2009] pour déterminer le coût total moyen a été proposé ; ce modèle de simulation a permis d'étudier les systèmes d'assemblage à plus de deux niveaux. Cependant, ce modèle requiert un grand nombre de simulations et un temps de calcul considérable pour converger vers une solution faisable.

Les problèmes liés à la variabilité des dates de livraison ont également été traités par [Ryu and Lee, 2003]. Étant donné que la variabilité des délais d'approvisionnement est un facteur important dans le processus de planification, la réduction du caractère aléatoire de l'approvisionnement influence les mesures de la performance dans une chaîne logistique, à savoir les coûts de stockage, l'effet de coup de fouet, et la disponibilité du produit. Dans cet article, les auteurs considèrent la réduction des délais d'approvisionnement comme un investissement. Ils ont travaillé sur la réduction des délais d'approvisionnement moyens et la variance des délais d'approvisionnement dans une chaîne logistique comportant deux fournisseurs. La distribution des délais d'approvisionnement des deux fournisseurs a été supposée exponentielle, la demande est considérée fixe et connue. L'idée est de comparer un modèle à deux fournisseurs avec un modèle qui ne réduit pas les délais d'approvisionnement et un deuxième modèle qui les réduit.

### **2.2.2 Délais d'approvisionnement et demande incertains**

Très peu d'études considèrent simultanément la variabilité de la demande et des délais d'approvisionnement en composants. Nous présentons quelques travaux qui s'intéressent à la planification d'un système d'assemblage sources d'incertitude de délais d'approvisionnement et de demande.

[Brennan and Gupta, 1993] ont développé un modèle de simulation pour mesurer la performance d'un système d'assemblage quand la demande et les délais d'approvisionnement sont incertains. Un système multi-produit et multi-niveau a été considéré, les auteurs ont conclu que ces incertitudes peuvent être maîtrisées en choisissant une technique de lotissement appropriée. Dans leur modèle de simulation, l'exécution des ordres de fabrications est gérée par le calendrier de lancement d'ordres planifiés. Un autre

algorithme est proposé afin de contrôler le lancement des ordres par la vérification de la disponibilité de tous les composants nécessaire à l'assemblage.

La planification d'un système d'assemblage à un niveau sur une seule période a été étudiée par [Song et al., 2000]. Le produit fini est composé de différents composants, livrés par un ou plusieurs fournisseurs. La demande en produit fini et les délais d'approvisionnement en composants sont considérés aléatoires. L'indicateur de performance à minimiser est le coût total composé de : (1) coût de stockage des composants avant le début de l'assemblage et (2) coût de rupture ou de stockage du produit fini. Les auteurs ont démontré que la fonction « coût », qui est une fonction aléatoire, est convexe quand l'ensemble des délais d'approvisionnement est fixé. Les auteurs ont proposé des heuristiques faciles à mettre en place: (1) le modèle de marchand de journaux, (2) les délais moyens, (3) la demande moyenne et (4) l'algorithme de descente basée sur le modèle Newsboy. Les auteurs ont déduit que l'ignorance de l'incertitude des délais d'approvisionnement peut coûter cher à l'entreprise et que l'utilisation d'heuristiques simples, qui tiennent compte de ces incertitudes, peuvent améliorer assez bien la performance de la chaîne logistique.

[Mohebbi and Choobineh, 2005] ont examiné l'effet de la dépendance entre les stocks de composants dans une nomenclature arborescente d'un système ATO (Assemblage à la Commande) lorsque la demande en produit fini et les délais d'approvisionnement des composants sont des variables aléatoires. Une étude par simulation a été utilisée pour analyser le niveau d'interaction entre les facteurs affectant la performance d'un système ATO. Dans cette étude, la demande est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

[Axsäter, 2006] s'est intéressé quant à lui à l'interaction entre la variation du délai d'approvisionnement et la variation de la demande. Les délais d'approvisionnement auprès des fournisseurs ont été supposés aléatoires. L'auteur a montré que les modèles de gestion de stocks traditionnels doivent tenir compte des aléas des délais d'approvisionnement. L'auteur a étudié la variabilité de la demande moyenne en présence de délais aléatoires. L'idée semble facile à mettre en œuvre pour un système d'assemblage à un seul type de composant, mais devient complexe quand il existe plusieurs types de composants et une dépendance entre les stocks de ces derniers.

### **2.2.3 Demande incertaine**

La variabilité de la demande est la plus grande source d'incertitude dans une chaîne logistique et la plus étudiée dans la littérature ces dernières années ([Graves, 2011]). Des recueils bibliographiques sur l'incertitude de la demande dans un système MRP sont présentés par [Koh et al., 2002], [Dolgui and Prodhon, 2007], [Graves, 2011] et [Damand et al., 2011].

Une manière de tenir compte d'une variabilité aléatoire de la demande est la mise en place de planification à horizon glissant. Lorsque la planification est mise en œuvre avec un horizon glissant, seules les décisions correspondant au début de l'horizon de planification (horizon gelé) sont réellement implémentées. Ces décisions sont dites « gelées » c'est à dire qu'elles ne peuvent être remises en cause par les planifications ultérieures ([Thierry, 2003]). [Sridharan and LaForge, 1994] utilisent la modélisation mathématique pour examiner l'impact de l'incertitude sur la demande d'un produit fini sur le PDP dans un MRP. Ils ont prouvé que les prévisions des quantités demandées influencent largement l'horizon glissant optimal. [Kadipasaoglu and Sridharan, 1995] ont précisé que la technique d'horizon glissant, pour un système d'assemblage multi-niveau, est un moyen efficace pour réduire l'instabilité et le coût total de production.

En utilisant la méthode de la transformée de Laplace, [Grubbström and Molinder, 1996] ont développé un plan de production robuste pour faire face à l'incertitude de la demande. Ils ont démontré que, dans un système d'assemblage multi-niveau, l'augmentation de la variabilité de la demande en produit fini amplifie l'incertitude dans le programme directeur de production des composants de niveaux plus bas de la nomenclature.

[Enns, 2002] a utilisé la simulation pour étudier l'impact des erreurs de prévision et l'incertitude de la demande sur la performance du MRP. Il a montré que la variation des stocks et l'incertitude des délais d'approvisionnements influencent significativement le taux de service. Et que ce taux croît lorsque le ratio erreur de prévision/demande croît.

**Tableau 2.2 : Incertitude sur la demande**

Article	Type de système	Critère	Paramètres	Commentaire
[Sridharan and LaForge, 1994]	Un produit fini	Taux de service	Gel d'une partie de PDP	Modélisation mathématique, demande suit la loi Normale
[Grubbström and Molinder, 1996]	Un niveau	Coût de stockage, coût de rupture, coût de replanification	PDP de sécurité	Demande suit la loi de Poisson
[Gurnani et al., 2000]	Un niveau	Coût de stockage, coût de rupture	-	La demande et le rendement suivent la loi Uniforme
[Enns, 2002]	Deux niveaux	Taux de service, erreurs de prévision	Stocks de sécurité, délais de sécurité, technique de lotissement	Erreurs de prévision détériore la performance du PDP
[Mula et al., 2006a]	Multi-niveau, multi-période, multi-produit	Taux de service, taux de service moyen, coût total	Délais de sécurité	Programmation linéaire, logique floue, contrainte de capacité
[Barbara-Gutiérrez and Adenso-Diaz, 2009]	Multi-niveau, multi-période	Distance de Hamming	-	MRP inversé, logique floue
[Inderfurth, 2009], [Inderfurth and Vogelgesang, 2011]	Multi-période	Taux de service, taux d'incertitude sur le rendement	Stocks de sécurité, technique de lotissement	Incertitudes sur le rendement



La performance du système MRP, quand la demande et le rendement sont incertains, a été étudié par [Inderfurth and Transchel, 2007] et [Inderfurth, 2009]. Le délai d'approvisionnement a été considéré nul, la demande est stationnaire, et le rendement est supposé proportionnel à la quantité commandée. L'auteur propose une expression analytique du stock de sécurité pour quelques lois connues (uniforme, normale) de la demande et du rendement quand la politique d'approvisionnement est la politique lot pour lot.

Dans [Inderfurth and Vogelgesang, 2011], les auteurs développent un concept qui peut être utilisé pour déterminer le stock de sécurité quand la demande et le rendement sont incertains. Ils proposent, à partir d'un niveau de stocks, une formule calculant les stocks de sécurité pour des rendements aléatoires. Les délais d'approvisionnement et la demande sont considérés aléatoires.

A partir des travaux de [Dolgui and Prodhon, 2007] et [Damand et al., 2011], nous pouvons constater que plusieurs cas, liés aux incertitudes de la demande, ont été traités. La simulation reste la méthode la plus utilisée. Néanmoins, d'autres méthodes sont aussi utilisées. La théorie des possibilités et de la logique floue pour modéliser l'incertitude de la demande ([Mula et al., 2006a] et [Mula et al., 2007]) et sa propagation tout au long d'un processus de planification de type MRP ([Grabot et al., 2005]). Selon [Galasso, 2007], cette méthode de modélisation permet aux gestionnaires d'obtenir une planification des besoins et un plan de charge flous qui peuvent éventuellement aider à évaluer l'activité de production à laquelle ils seront susceptibles de faire face. [Rossi et al., 2010] ont proposé une approche de programmation par contraintes pour étudier la politique  $(R,S)$  pour un seul produit avec des délais d'approvisionnement stochastiques et une demande stochastique non stationnaire. Ils ont démontré que la politique de gestion de stocks de type  $(R,S)$  n'est plus adéquate lorsque les délais d'approvisionnement sont incertains comparée à un cas où ces mêmes délais sont déterministes ou égaux à zéro.

La partie suivante sera consacrée aux limites du système MRP. Nous étudions les différentes méthodes de paramétrage de ce système dans un environnement incertain.

### **2.3 Nervosité de la méthode MRP**

Dans les entreprises, la méthode MRP est souvent associée à la notion de flux poussé où les flux physiques sont pilotés par l'information afin de contrôler lesancements d'ordres de fabrication ou d'ordres d'approvisionnement en composants. Cesancements sont effectués en se basant soit sur les quantités planifiées par le système MRP, soit en fonction d'autres priorités (production pour une commande ou pour un stock de sécurité, respecter la capacité disponible, etc.).

Les propositions de lancement déterminées par le système MRP doivent recevoir l'aval du planificateur au lieu d'être considérées comme des ordres de fabrication automatiques. Or la méthode MRP se base sur un modèle déterministe qui n'accepte aucune variation, aucun aléa ou encore aucune perturbation. Toutes les commandes sont lancées en indiquant les dates de lancement et de fabrication au plus tard, donc le coût total sera automatiquement le plus faible possible. Mais, des aléas, des variations et des perturbations nous en rencontrons très souvent dans un atelier de production. Et donc le sens de l'expression « au plus tard » devient lui-même incertain. Le planificateur enregistre, à chaque intervention, les quantités approvisionnées et corrige les données en fonction des événements réels (erreurs de stocks, approvisionnements en retard, etc.). Le fonctionnement du système MRP est géré par exception : Un message est généré automatiquement par le système pour indiquer les références qui nécessitent une intervention. On parle de nervosité du système MRP si le PDP devient instable à cause d'une grande fréquence d'intervention ([Herrera and Thomas, 2009]).

La nervosité concerne aussi les réajustements continuels dans les calendriers de production. Des PDP, qui changent de façon répétitifs peuvent mener à une mauvaise qualité de service. Ainsi, le but est de trouver un compromis adéquat. Des méthodes communes sont basées sur l'horizon gelé, ou sur demande de règle spécifiques (des barrières de temps) concernant les possibilités de modification des PDP selon la période considérée.

Pour obtenir de meilleurs résultats, [Zhao and Lam, 1997] démontrent que la replanification devrait être faite à la fin de la période gelée. En outre, une bonne prévision

sur l'horizon planifié et le gel des PDP peuvent agir contre les incertitudes internes de d'approvisionnement. Néanmoins, ils sont parfois insuffisants ; le choix d'une méthode adéquate de lotissement peut aussi aider à réduire la nervosité ([Dolgui and Prodhon, 2007]).

De nombreuses études se penchent sur l'instabilité du MRP et proposent plusieurs méthodes pour faire face à la nervosité du MRP.

## **2.4 Les paramètres du MRP**

### **2.4.1 Stocks et délais de sécurité**

En entreprise, les stocks de sécurité permettent de faire faces aux ruptures de stocks dues aux aléas (la variation de la demande, des délais d'approvisionnement, etc.) ; mais ils sont aussi une charge financière et une immobilisation de capitaux. Ils doivent donc être dimensionnés en fonction de plusieurs critères à savoir le degré d'incertitude, le niveau de service souhaité, et les coûts liés au stockage et à la rupture.

En ce qui concerne le délai de sécurité, [Melnik and Piper, 1981] proposent d'agir sur une marge temporelle au lieu d'agir sur une marge de quantités. Le délai d'approvisionnement planifié est calculé en fonction du délai de sécurité et du délai d'approvisionnement prévisionnel. Par exemple ce délai de sécurité peut être égal à plusieurs fois l'écart type du délai prévisionnel.

Les délais de sécurité sont souvent utilisés pour couvrir l'incertitude sur les dates de disponibilité du produit fini et des composants. L'incertitude sur ces dates peut être due aux aléas dans le processus de production ou d'approvisionnement. [Whybark and Williams, 1976] démontrent que l'utilisation du délai de sécurité est plus efficace que les stocks de sécurité quand les délais d'approvisionnements sont incertains et que les stocks de sécurités sont à utiliser quand des incertitudes portent sur les quantités. Néanmoins, ce n'est pas la conclusion de [Grasso and Taylor, 1984], qui préfèrent, pour les structures linéaires, les stocks de sécurité dans tous les cas.

D'autres pistes de protection contre les incertitudes dans un système MRP ont été explorées dans [Graves, 1988]. L'auteur souligne l'importance des stocks de sécurité et présente plusieurs méthodes pour déterminer leurs niveaux. [Miller, 1979] a proposé des heuristiques qui consistent à fixer les seuils des aléas et de calculer les stocks de sécurité qui satisfont la demande si les aléas ne dépassent pas des seuils fixés en avance. Quant aux conclusions de [De Bodt and Van Wassenhove, 1983], ils préfèrent opter pour des solutions de type stocks de sécurité lorsque la durée entre deux commandes est faible et que la demande varie légèrement.

[Buzacott and Shanthikumar, 1994] ont prouvé l'existence d'une corrélation entre les précisions sur la demande, les stocks de sécurité optimaux et la variation des délais d'approvisionnement. Dans le cas où l'information sur la demande n'est pas fiable, ou lorsque les délais de fabrication sont incertains, les auteurs ont étudié l'impact du choix entre les stocks de sécurité et les délais de sécurité pour des systèmes de type MRP. Ils concluent que l'utilisation des délais de sécurité est préférée quand les décideurs ont moins d'incertitude sur la demande.

Leurs conclusions sont remises en question par [Molinder, 1997] qui propose une méta-heuristique, basée sur la simulation, qui détermine les niveaux des stocks de sécurité et les délais de sécurité optimaux dans un système MRP en considérant des variations possibles de la demande et des délais d'approvisionnement. Les degrés d'incertitude des délais et de la demande ainsi que le ratio coût de rupture/coût de stockage influencent ces paramétrages du système MRP.

Une conclusion similaire est faite par [Koh and Saad, 2003]. Les auteurs démontrent par simulation que, dans un système MRP gérant la production par lots, les stocks de sécurité sont utilisés pour faire face aux incertitudes liées à la production, et que les délais de sécurité sont utiles pour faire face à l'incertitude de la livraison et d'assemblage. Néanmoins, [Giard, 2003] précise que la détermination des niveaux des stocks de sécurité

reste la difficulté majeure dans une chaîne logistique soumise à une fluctuation considérable de la demande et des délais.

Quand à [Van Kampen Tim et al., 2010], ils examinent la faisabilité et la performance du niveau de stocks de sécurité et des délais de sécurité dans le cas d'incertitudes liées: (1) au processus de production, (2) incertitudes sur la demande et (3) à la demande et au processus de production à la fois. Un modèle de simulation est proposé. Cette étude conclut que l'utilisation des délais de sécurité est la stratégie la plus performante pour faire face aux incertitudes liées au processus de production, et aux incertitudes de la demande et de production à la fois. Alors que les stocks de sécurité sont plus performants seulement quand la demande est incertaine.

Dans [Guide and Srivastava, 2000] les auteurs étudient le choix de niveau de stock de sécurité et/ou la longueur du délai de sécurité pour faire face aux incertitudes liées à la demande et au processus de production (panne machines, délais de fabrication, défauts de fabrication, etc.). Plusieurs autres articles se sont intéressés aux mêmes paramètres. Nous citons par exemple [Hegedus and Hopp, 2000] qui ont proposé une méthode pour déterminer les délais de sécurité liés à l'obtention des composants dans un système d'assemblage. La demande et les délais d'approvisionnement ont été supposés discrets et aléatoires et la règle de lotissement à période fixe a été utilisée.

[Persona et al., 2007] ont utilisé une méthode analytique pour dimensionner les stocks de sécurité en composants et en modules préassemblés quand la production est faite à la commande. Les demandes en composants préassemblés ont été supposées corrélées au sein d'une même famille de composants. Cette corrélation se traduit par une relation entre les différentes demandes portant sur des modèles alternatifs d'un même ensemble. Cette relation est le résultat d'une contrainte liée à la distribution multinomiale et non à une corrélation entre variables aléatoires.

[Giard and Sali, 2011] prouve que les stocks de sécurité ne permettent d'entraver qu'une partie de causes d'incertitude. Ils indiquent que les solutions de type stocks de sécurité ne

sont convenables que quand la variabilité de la demande est forte et la variabilité de délais d'approvisionnement est faible.

**Tableau 2.3 :** Stocks de sécurité et délais de sécurité pour le paramétrage d'un système MRP

Paramètres	Articles	Commentaires
Délais de sécurité	[Whybark and Williams, 1976], [Dolgui et al., 1995], [Molinder, 1997], [Guide and Srivastava, 2000], [Hegedus and Hopp, 2000], [Enns, 2002], [Ould Louly and Dolgui, 2002a], [Ould Louly and Dolgui, 2002b], [Ould Louly and Dolgui, 2003], [Koh and Saad, 2003], [Ould Louly and Dolgui, 2004], [Ould Louly and al., 2008a], [Ould Louly and al., 2008b], [Ould Louly and Dolgui, 2009], [Ould Louly and Dolgui, 2012], [Ould Louly and Dolgui, 2013]	Pour faire face aux incertitudes liées au temps de production et aux délais d'approvisionnement en composants
Stocks de sécurité	[Whybark and Williams, 1976], [Miller, 1979], [De Bodt and Van Wassenhove, 1983], [Grasso and Taylor, 1984], [Graves, 1988], [Guide and Srivastava, 2000], [Enns, 2002], [Koh and Saad, 2003], [Persona et al., 2007], [Inderfurth, 2009], [Van Kampen Tim et al., 2010], [Camisullis and Giard, 2010], [Giard and Sali, 2011], [Inderfurth and Vogelgesang, 2011]	Pour faire face aux incertitudes liées à la demande et aux quantités produites

Il est important de noter que, malgré l'existence de nombreux travaux qui examinent la performance des stocks et des délais de sécurité (voir **Tableau 2.3**), l'opposition entre stock de sécurité et délai de sécurité n'est pas aussi tranchée qu'on pourrait le croire.

#### 2.4.2 Technique de lotissement

Afin de minimiser les coûts, il est souvent préférable de grouper les commandes, au lieu de commander selon la règle du lot-pour-lot, c'est-à-dire commander seulement les besoins nets pendant une seule période.

Le lot-pour-lot permet de réduire le stock, mais ne prend pas en considération les contraintes organisationnelles. Parfois, le coût de commande est très important par rapport au coût de possession, donc le groupement de commandes est préférable.

Même si plusieurs techniques, permettant de déterminer un plan de production d'un ensemble de produits sur un horizon de temps de plusieurs périodes, sont proposées pour minimiser les coûts de production, de stockage et de rupture, la taille des lots reste à déterminer. Les problèmes de détermination de la taille des lots sont largement étudiés dans la littérature, notamment en planification des approvisionnements ou de la production ([Brahimi, 2004]). Ils sont connus dans la littérature sous l'appellation anglo-saxonne de *lot-sizing problems*.

Il existe une dizaine de règles de lotissement parmi lesquelles on peut citer : (1) La Quantité de Commande Économique, (2) la Quantité de Commande Périodique, (3) l'algorithme Wagner-Within :

- La Quantité de Commande Économique a été introduite par Harris en 1913. Elle consiste à déterminer par le calcul la quantité économique de Wilson ([Lee and Nahmias, 1993]). Cette technique est déconseillée lorsque l'hypothèse de régularité de la demande n'est pas respectée car dans ce cas cette quantité conduit à un stockage inutile sur la dernière période de consommation ([Giard, 2003]).
- La Quantité de Commande Périodique consiste à calculer un nombre fixe de périodes pour lesquelles on fait la commande ; et à partir de ce nombre, la quantité nécessaire à commander est obtenue.
- L'algorithme Wagner-Whitin ([Wagner and Whitin, 1958]) est une procédure qui détermine le coût de commande minimal pour une demande déterministe sans contrainte de capacité. Cet algorithme est utilisé quand le coût unitaire est constant, le coût de commande est non nul et la fonction de coût d'approvisionnement est concave ([Jeunet and Jonard, 2000]).

De nombreuses heuristiques ont vu le jour. Par exemple, Ho et Lau ([Ho and Lau, 1994]) ont démontré que, avec des délais incertains, l'heuristique Silver-Meal ([Silver and Meal, 1973]) fournit les meilleurs résultats. Elle permet de couvrir  $p$  périodes par commande. Le but est de trouver  $p$  qui minimise le coût moyen de gestion de stocks par période.

Les modèles de lotissement avec des contraintes de capacité peuvent être trouvés dans [Lee and Nahmias, 1993] et des modèles avec la variation du coût d'achat dans [Martel and Gascon, 1998]. Plusieurs règles de lotissement ainsi que leurs paramètres sont introduits dans [Kuik et al., 1994].

Concernant les comparaisons des règles de lotissement, [Plenert, 1999] suggère d'appliquer le lot pour lot aux produits de classe A et la plupart des produits de classe B, selon la classification de Pareto, sauf sur quelques cas spécifiques.

En général, avec des incertitudes de délais et de demande, l'efficacité relative aux règles de lotissement n'est pas stable. Par exemple, Fildes et Kingsman ([Fildes and Kingsman, 1997]), cité par Koh ([Koh et al., 2002]), a fait une étude pertinente sur les incertitudes au niveau de la demande et ont constaté cet effet. Donc, en cas d'incertitudes, il faudrait d'abord d'augmenter la fiabilité des prévisions ([Nमित, 2007] et [Dolgui et al., 1995]).

Quelques règles de lotissement peuvent produire plus de nervosité que d'autres ([Vollmann et al., 1997]). Cela signifie qu'ils peuvent provoquer de grands changements dans la planification même si à l'origine les modifications sont petites. Ceci peut être observé aussi pour des variations sur le niveau de demande, la date de livraison, la quantité commandée et le délai. Ce phénomène est particulièrement visible avec la règle de la Quantité de la commande économique de Wilson.

Concernant l'effet de coup de fouet ([Lee et al., 2004]), si les commandes planifiées sont faites trop tôt, ou si des paramètres MRP ne sont pas correctement choisis, l'instabilité du système devient apparente. Plus grand est le nombre de niveaux dans la nomenclature, plus grande est l'amplitude des effets. Toutefois, l'instabilité du système peut être réduite si le modèle du lot économique (*EOQ*) ou du lot pour lot pourrait être choisi pour le niveau le



plus haut ; et le modèle du nombre de périodes fixe (*POQ*) pour les niveaux immédiatement inférieurs et pour tous les autres niveaux.

## **2.5 Conclusions**

Dans ce chapitre, nous avons analysé plusieurs études trouvées dans la littérature scientifique concernant la gestion des approvisionnements dans un environnement incertain. Plusieurs articles de l'état de l'art analysent les sources d'incertitude dans un environnement de production et fournissent des réflexions et des méthodes qui peuvent être utilisées pour faire face à ces incertitudes.

Les sources d'incertitude sont généralement scindées en deux groupes : les incertitudes externes liées à l'environnement et les incertitudes internes au système. La demande et les délais d'approvisionnement sont les incertitudes externes les plus étudiées. Les incertitudes liées à la capacité, au processus de fabrication, à la qualité et à la variabilité du temps de production constituent des incertitudes internes qui touchent directement le système de production.

La plupart des études analysent une seule source d'incertitude à la fois et trop de paramètres sont fixés ou non précisés. L'instauration de stocks de sécurité, de délais de sécurité, de technique de lotissement et d'horizon glissant sont les différentes techniques proposées pour faire face à ces variabilités.

Les délais de sécurité sont de plus en plus utilisés pour faire face aux aléas d'approvisionnement puisque la variabilité temporelle est l'un des principaux facteurs qui affectent la performance de la chaîne logistique et rendent le processus de planification plus complexe.

Nous focalisons notre travail sur la variabilité des délais d'approvisionnement. Nous constatons que les systèmes à structure linéaire à moins de 3 niveaux sont les plus étudiés et la plupart des modèles trouvés dans la littérature sont souvent dédiés à une seule source d'incertitude. Les modèles analytiques sont rarement proposés pour traiter les chaînes linéaires à plus de deux niveaux et sont souvent difficiles à généraliser au cas multi-

niveaux. Ce dernier cas est généralement modélisé par la simulation et optimisé par des méthodes approchées.

C'est encore plus complexe pour le cas des systèmes d'assemblage. Les études les plus connues s'intéressent aux modèles mono-période à un niveau. Pour ces modèles, la dépendance entre les composants (c'est-à-dire que l'assemblage n'est pas faisable si les composants nécessaires ne sont pas disponibles) a pu être traitée. Cependant, la complexité due à la dépendance entre les niveaux (c'est-à-dire que la disponibilité d'un composant dépend nécessairement de la disponibilité de tous les composants qui le composent) n'a pas été résolue.

Dans notre thèse, nous allons proposer une méthode exacte (chapitre 3) et une autre approchée (chapitre 4) pour optimiser un système d'assemblage mono-période à deux niveaux. Dans le chapitre 5, nous généralisons le modèle analytique proposé au cas d'un système d'assemblage multi-niveau. Une méthode d'optimisation performante sera ainsi proposée.

## **Chapitre 3 : Optimisation d'un système d'assemblage à deux niveaux par une PSE**

### **3.1 Introduction**

La gestion de stocks et la planification des approvisionnements en présence d'aléas est un problème classique pour les entreprises industrielles. Le plus souvent, dans la littérature, cette gestion de stocks est élaborée en considérant des variations possibles sur la demande, mais les problèmes de planification pour les systèmes soumis aux aléas des délais d'approvisionnement ne sont pas autant étudiés. Les études actuelles font une restriction sur le nombre de niveaux dans l'arborescence de la nomenclature du produit fini et se limitent à deux niveaux au plus.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au problème de la planification des approvisionnements d'un système d'assemblage à deux niveaux quand les délais d'approvisionnement sont aléatoires. Les fournisseurs de niveau 2 délivrent, avec un délai de livraison aléatoire, les composants nécessaires aux assemblages des composants de niveau 1, qui sont eux-mêmes assemblés pour la fabrication du produit fini avec un temps de cycle aléatoire.

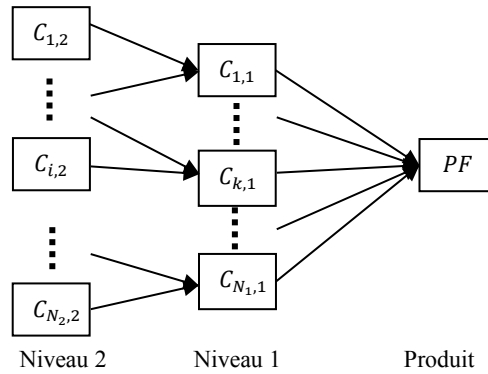
Nous nous plaçons dans un environnement temporel discret (le temps est calculé en jours par exemple). Ainsi, nous supposons que les délais d'approvisionnement en composants sont des variables aléatoires discrètes qui suivent une loi discrète et à distribution connue. Le délai de fabrication du produit fini est supposé négligeable. Nous cherchons alors les valeurs optimales des dates de lancement des ordres aux fournisseurs de niveau 2 minimisant l'espérance mathématique du coût total.

Dans ce chapitre, ainsi que dans les chapitres suivants, l'espérance mathématique du coût total est appelée « coût total moyen ». Dans ce chapitre, ce coût total moyen est égal à la somme du coût de stockage des composants et des coûts de rupture et de stockage du produit fini.

Le travail de ce chapitre se base essentiellement sur les travaux de [Hnaien et al., 2009] sur les systèmes d'assemblage à deux niveaux quand les délais d'approvisionnement sont incertains et la demande est connue. La description générale du problème est présentée dans la section suivante. La fonction objectif est décrite dans la section 3.3. La section 3.4 présente un algorithme de prétraitement permettant de réduire l'espace de recherche. Dans la section 3.5, une procédure d'optimisation exacte et efficace de type Procédure par Séparation et Évaluation (PSE) est proposée afin de minimiser la fonction objectif. Quelques résultats expérimentaux sont ensuite présentés afin d'illustrer les performances de la méthode face à différents instances.

### 3.2 Description du problème

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de la planification des réapprovisionnements des systèmes d'assemblage à deux niveaux ([Ben Ammar et al., 2013b]) : le produit fini est assemblé dès que tous les composants sont disponibles (assemblage au plus tôt). Ces composants sont obtenus à partir d'autres composants (**Figure 3.1**). Nous supposons que chaque composant de niveau 2 intervient dans le montage d'un unique composant de niveau 1 (hypothèse d'une nomenclature arborescente sans composants communs).



**Figure 3.1** : Description de la nomenclature

Nous étudions un seul type de produit fini. Nous considérons le cas d'un problème mono-période. La demande en produit fini est supposée connue ainsi que sa date de livraison

souhaitée par le client (la fin de la période  $T$ ). Le coût unitaire de stockage pour chaque type de composant et les coûts unitaires de stockage et de rupture pour ce produit sont connus. Les délais d'approvisionnement pour les différentes commandes des composants sont indépendants et la probabilité de distribution des délais d'approvisionnement est discrète et bornée sur un intervalle connu.

Les notations utilisées sont présentées dans le **Tableau 3.1**.

**Tableau 3.1** : Notations

*Données*

$T$	Date de livraison du produit fini, $T > 0$
$D$	Demande (connue) en produit fini pour la date $T$ ; sans perte de généralité on pose $D=1$
$l$	Niveau dans la nomenclature, $l = 1$ ou $2$
$N_l$	Nombre de types de composants au niveau $l$
$c_{i,l}$	Composant $i$ du niveau $l$ de la nomenclature
$S_{i,l}$	L'ensemble des composants nécessaires à l'assemblage d'un composant $c_{i,l}$ dans la nomenclature
$L_{i,l}$	Délai d'approvisionnement des composants de type $c_{i,l}$ (variable aléatoire discrète)
$u_{i,l}$	Valeur maximale de $L_{i,l}$ ; chaque $L_{i,l}$ varie entre une période et $u_{i,l}$ (dans l'intervalle $[1, u_{i,l}]$ )
$U_{k,2}$	Valeur maximale de $(L_{i,1} + L_{k,2}) \quad \forall c_{k,2} \in S_{i,1}$ ; $L_{i,1} + L_{k,2}$ varie dans l'intervalle $[2, U_{k,2}]$ (puisque $L_{i,1}$ varie dans l'intervalle $[1, u_{i,1}]$ et $L_{k,2}$ varie dans l'intervalle $[1, u_{k,2}]$ ) avec, $U_{k,2} = u_{i,1} + u_{k,2}$
$h_{i,l}$	Coût unitaire de stockage du composant $c_{i,l}$ par période
$b$	Coût unitaire de rupture en produit fini par période
$r$	Coût unitaire de stockage en produit fini par période

*Variables*

$X_{k,2}$	<b>Variable de décision</b> : Date de lancement d'ordre au fournisseur d'un composant de type $c_{k,2}$ (c.à.d. au deuxième niveau), $X_{k,2} \in [T - U_{k,2}; T - 2]$ , $\forall c_{k,2} \in S_{i,1}$ (c.à.d. si cette date est inférieure à $T - U_{k,2}$ , il y aura toujours du stockage du produit fini et si cette date est supérieure à $T - 2$ , le produit fini sera toujours en rupture de stock)
-----------	--

## Fonctions

$E[\cdot]$	Espérance mathématique de $[\cdot]$
$F_{i,l}(\cdot)$	Fonction de répartition de la variable aléatoire $L_{i,l}$ du composant $c_{i,l} \in N_{i,l}, l \in \{1,2\}$

Nous supposons aussi que la capacité d'assemblage pour tous les composants ainsi que pour le produit fini est infinie. Les délais d'approvisionnement pour un type de composant suivent toujours la même loi, Le coût de stockage d'un composé est strictement supérieure au coût de stockage de ses composants :

$$h_{i,1} - \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} > 0, \forall i = 1, \dots, N_1$$

Par la suite ces notations sont utilisées pour simplifier certaines expressions :

- La date d'assemblage d'un composant  $c_{i,1}$  :  $M_{i,1} = \max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (L_{k,2} + X_{k,2})$
- La date d'assemblage du produit fini :  $M_{PF} = \max_{i=1, \dots, N_1} (M_{i,1} + L_{i,1})$
- Le maximum entre  $M_{PF}$  et  $T$  :  $M_{PF}^+ = \max(M_{PF}, T)$
- Le minimum entre  $M_{PF}$  et  $T$  :  $M_{PF}^- = \min(M_{PF}, T)$
- La différence entre le coût de stockage d'un composant  $i$  et les coûts de stockage des composants  $c_{k,2}$  qui le composent :  $H_i = h_{i,1} - \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2}, \forall i = 1, \dots, N_1$
- $H = \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} + b$
- $R = r - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1}$

- $\langle Y \rangle^+ : \max(0, Y)$
- $\langle Y \rangle^- : \min(0, Y)$

Nous notons que  $H_i$  (qui est égal à la différence entre : (1) le coût de stockage d'un composant  $h_{i,1}$  et (2) la somme des coûts de stockage des composants  $h_{k,2}$  qui le composent) et  $R$  sont supérieurs à zéro car sinon cela sous-tend qu'il est préférable de stocker les composant non assemblés plutôt que de les assembler.

Nous cherchons donc à obtenir  $X_{k,2}$  les dates de lancement des ordres aux fournisseurs de niveau 2 qui minimisent le coût total moyen qui est la somme des coûts de stockage des composants et des coûts de stockage et de rupture en produit fini. Nous notons qu'aucun autre coût ne sera considéré.

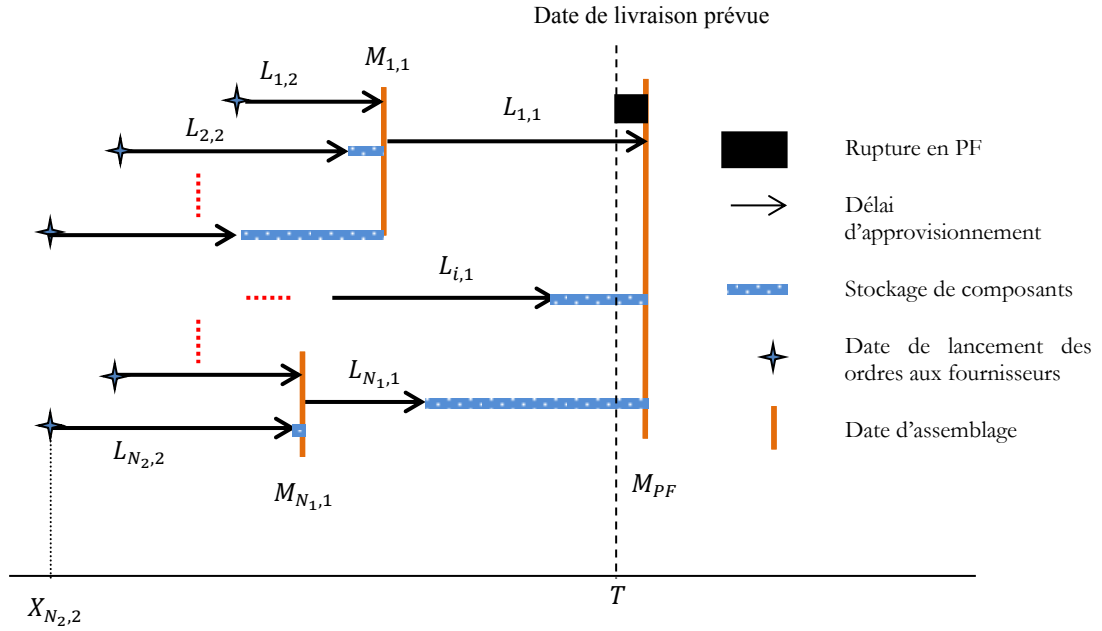
Notre problème peut donc se modéliser comme suit :

$\min(EC[X, L])$  sous la contrainte :

$$T - U_{i,2} \leq X_{i,2} \leq T - 2, \forall i \in \{1, \dots, N_2\}$$

### 3.3 Détermination des coûts

Le cas d'assemblage des composants au plus tôt est considéré : un composant  $c_{i,1}$  est assemblé dès que tous les composants  $c_{k,2}$  nécessaires pour son assemblage sont présents, le problème est donc de trouver la date de lancement optimale au niveau 2 afin de satisfaire la demande  $D$  à la date de livraison prévue  $T$ , en minimisant le coût total moyen (**Figure 3.2**).



**Figure 3.2 :** Illustration du problème

**Proposition 3.1**

Pour ce système d'assemblage à deux niveaux, le coût total  $C(X, L)$  s'écrit sous la forme :

$$C(X, L) = \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} M_{PF} - \sum_{i=1}^{N_1} H_i M_{i,1} - \sum_{l=1}^2 \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} L_{i,l} - \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} X_{i,2} + b \quad (3.1)$$

$$\times (M_{PF}^+ - T) + r \times (T - M_{PF}^-)$$

Où

- $L = (L_{1,1}, \dots, L_{i,1}, \dots, L_{N_1,1}, L_{1,2}, \dots, L_{i,2}, \dots, L_{N_2,2})$
- $X = (X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2,2})$
- $X_{k,2} \in [T - U_{k,2}; T - 2], \forall c_{k,2} \in S_{i,1}$

**Démonstration 3.1**



Certains composants  $c_{k,2} \in S_{i,1}$  du niveau 2 sont stockés. L'arrivée du dernier composant déclenche l'assemblage du composant  $c_{i,1}$ . Le coût de stockage  $C_{sc_2}$  des composants  $c_{k,2}$  est donc égal à :

$$C_{sc_2} = \sum_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} (M_{i,1} - (L_{k,2} + X_{k,2})) \right) \quad (3.2)$$

Concernant l'assemblage du produit fini à partir des composants de niveau 1, il peut y avoir à la fois un coût de stockage et un coût de rupture en produit fini. En effet, les composants de niveau 1 sont stockés au fur et à mesure de leur arrivée jusqu'à ce que tous les composants de niveau 1 soient présents (comme au niveau inférieur).

Il peut y avoir un coût de rupture en produit fini si le dernier composant de niveau 1 arrive après  $T$ , date de livraison demandée du produit fini, c.-à-d. si  $M_{i,1} + L_{i,1} > T$ . Le temps de rupture en produit fini se calcule en recherchant le composant pour lequel la valeur  $M_{i,1} + L_{i,1}$  est la plus grande, c.-à-d. :  $M_{PF}$ . Or :

$$M_{PF}^+ = \max(M_{PF}, T) = \begin{cases} M_{PF} & \text{si } M_{PF} > T \\ T & \text{si } M_{PF} \leq T \end{cases}$$

Donc :

- Si le produit fini est disponible après la date de livraison  $T$  souhaitée par le client ( $M_{PF} > T$ ): Le coût de rupture en produit fini est égal à :

$$C_{bPF} = b \times (M_{PF} - T)$$

- Sinon  $C_{bPF} = 0$

Le coût de rupture en produit fini  $C_{bPF}$  vaut donc :

$$C_{bPF} = b \times (M_{PF}^+ - T) \quad (3.3)$$

Si le dernier composant de niveau 1 arrive avant  $T$ , date de livraison demandée du produit fini, c.-à-d. si  $M_{i,1} + L_{i,1} < T$ , le produit fini est disponible avant la date de livraison. Or :

$$M_{PF}^- = \min(M_{PF}, T) = \begin{cases} M_{PF} & \text{si } M_{PF} < T \\ T & \text{si } M_{PF} > T \end{cases}$$

Donc :

- Si le produit fini est disponible après la date de livraison  $T$  souhaitée par le client ( $M_{PF} > T$ ): Le coût de stockage du produit fini est égal à :

$$C_{rPF} = 0$$

- Sinon  $C_{rPF} = r \times (T - M_{PF}^-)$

Le coût de stockage  $C_{rPF}$  est égal à :

$$C_{rPF} = r \times (T - M_{PF}^-) \quad (3.4)$$

Par ailleurs, il y a stockage des composants de type  $c_{i,1}$ ,  $\forall i = 1, \dots, N_1$ , pendant le temps s'écoulant entre la date de leur arrivée ( $M_{i,1} + L_{i,1}$ ) et la date à laquelle tous les composants de niveau 1 sont présents :  $M_{PF} = \max_{i=1, \dots, N_1} (M_{i,1} + L_{i,1})$ . Le coût de stockage  $C_{sc_1}$  des composants de niveau 1 est donc le suivant :

$$C_{sc_1} = \sum_{i=1}^{N_1} \left( h_{i,1} \left( M_{PF} - (M_{i,1} + L_{i,1}) \right) \right) \quad (3.5)$$

C.Q.F.D.

Les délais d'approvisionnement  $L_{i,l}$  sont des variables aléatoires. Le coût (3.1) est donc une variable aléatoire. Notre objectif est de minimiser son espérance mathématique, c'est-à-dire  $EC[X] = E[C(X, L)]$ .

### **Proposition 3.2**

*L'espérance mathématique du coût total  $EC[X] = E[C(X, L)]$  s'écrit comme suit:*

$$\begin{aligned}
 EC[X] = & (r \times T) + H \times \left( \sum_{s \geq T} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbf{Z}}} \left[ P[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right] \right) \right) \\
 & - R \\
 & \times \left( \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbf{Z}}} \left[ P[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right] \right) \right) \\
 & - \sum_{i=1}^{N_1} H_i \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + s) \right) - \sum_{l=1}^2 \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E[L_{i,l}] \right) \\
 & - \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} X_{i,2}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

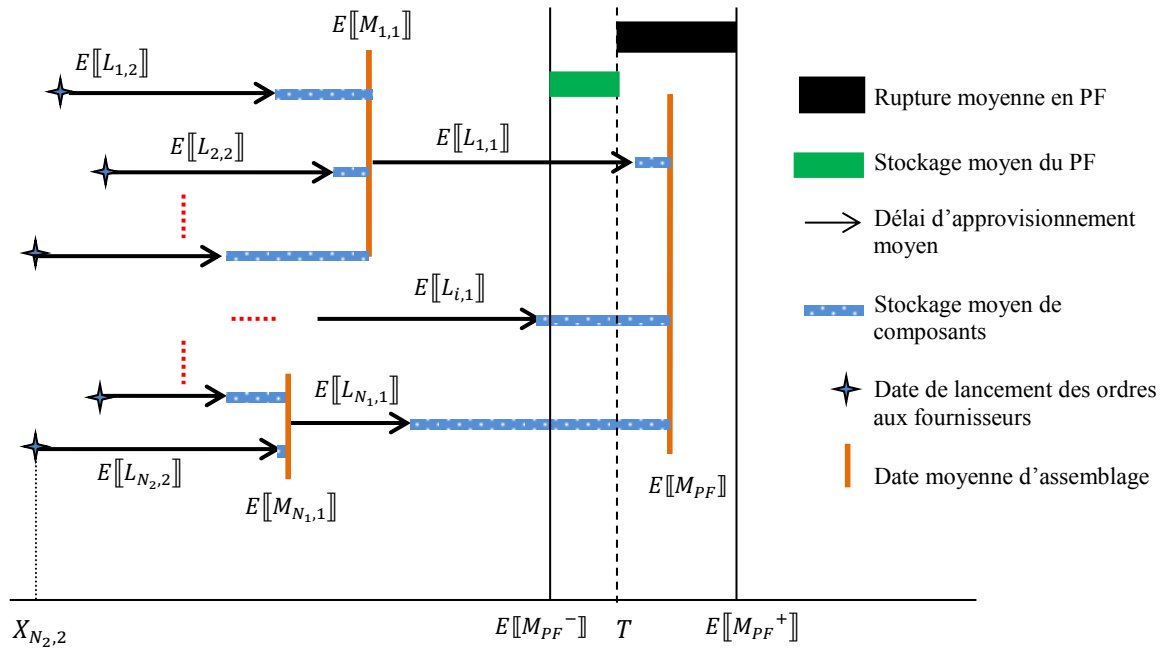
Où  $X = (X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2,2})$ .

### **Démonstration 3.2**

A partir de l'équation (3.1) nous déterminons l'expression mathématique initiale de l'espérance mathématique du coût total :

$$\begin{aligned}
E[C(X, L)] = & \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} E[M_{PF}] - \sum_{i=1}^{N_1} H_i E[M_{i,1}] - \sum_{l=1}^2 \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E[L_{i,l}] \right) \\
& - \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} X_{i,2} + b \times (E[M_{PF}^+] - T) + r \times (T - E[M_{PF}^-])
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Afin de déterminer l'expression exacte  $E[C(X, L)]$ , nous avons besoin de calculer (**Figure 3.3**):



**Figure 3.3 :** L'espérance mathématique du coût total

- $E[M_{PF}] = E \left[ \max_{i=1, \dots, N_1} (M_{i,1} + L_{i,1}) \right]$

- $E[M_{i,1}] = E[\max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (L_{k,2} + X_{k,2})]$
- $E[M_{PF}^+] = E[\max(M_{PF}, T)]$
- $E[M_{PF}^-] = E[\min(M_{PF}, T)]$

Tels que  $M_{PF}^+ = \max(M_{PF}, T)$  et  $M_{PF}^- = \min(M_{PF}, T)$ .

Soit  $\Gamma$  une variable aléatoire discrète positive ou nulle. Son espérance mathématique est égale à :

$$E[\Gamma] = \sum_{s \geq 0} s \times Pr[\Gamma = s] = \sum_{s \geq 0} \sum_{k=0}^{s-1} Pr[\Gamma = s]$$

De plus  $\Gamma$  est à valeurs entières, donc les deux sommes de l'égalité ci-dessus peuvent être permutées de la manière suivante :

$$E[\Gamma] = \sum_{s \geq 0} \sum_{k=0}^{s-1} Pr[\Gamma = s] = \sum_{s \geq 0} \sum_{s > k} Pr[\Gamma = s] = \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[\Gamma \leq s]) \quad (3.8)$$

$M_{PF}^+$  est une variable aléatoire discrète positive avec un nombre fini de valeurs possibles. Elle varie dans l'intervalle  $[T; T - 2 + \max(U_{i2})]$ .

Nous utilisons l'expression (3.8) pour calculer son espérance mathématique :

$$E[M_{PF}^+] = E[\max(M_{PF}, T)] = \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[\max(M_{PF}, T) \leq s])$$

Sachant que  $Pr[\max(M_{PF}, T) \leq s] = Pr[M_{PF} \leq s; T \leq s]$  et  $M_{PF}$  ne dépend pas de  $T$  alors:

$$Pr[\max(M_{PF}, T) \leq s] = Pr[M_{PF} \leq s] \times Pr[T \leq s]$$

Donc :

$$E[M_{PF}^+] = \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[M_{PF} \leq s] \times Pr[T \leq s])$$

Or la date de livraison souhaitée par le client  $T$  est connue et supérieure à 0. Donc :

$$\begin{cases} Pr[T \leq s] = 0 & \forall s > T \\ Pr[T > s] = 1 & \forall s \leq T \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} E[M_{PF}^+] &= \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[M_{PF} \leq s] \times Pr[T \leq s]) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s] \times Pr[T \leq s]) \\ &\quad + \sum_{s \geq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s] \times Pr[T \leq s]) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s] \times 0) + \sum_{s \geq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s] \times 1) \\ &= \sum_{0 \leq s \leq T} (1) + \sum_{s \geq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s] \times 1) \end{aligned}$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} Pr[M_{PF} \leq s] &= Pr \left[ \max_{i=1, \dots, N_1} (M_{i,1} + L_{i,1}) \leq s \right] \\ &= Pr[M_{1,1} + L_{1,1} \leq s, \dots, M_{i,1} + L_{i,1} \leq s, \dots, M_{N_1,1} + L_{N_1,1} \leq s] \end{aligned}$$

De plus,  $\forall i = 1, \dots, N_1$ , les variables aléatoires  $(M_{i,1} + L_{i,1})$  sont également indépendantes, alors :

$$\sum_{s \geq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) = \sum_{s \geq T} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1 + o_2 = s \\ o_1 + o_2 \in \mathbb{Z}}} [Pr[L_{i,1} = o_1] \times Pr[M_{i,1} \leq o_2]] \right)$$

Les variables aléatoires  $L_{k,2} + X_{k,2}$ , pour  $c_{k,2} \in S_{i,1}$ , sont aussi indépendantes, donc :

$$Pr[M_{PF} \leq s] = \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1 + o_2 = s \\ o_1 + o_2 \in \mathbb{Z}}} \left[ Pr[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} Pr[L_{k,2} \leq -X_{k,2} + o_2] \right]$$

Par la suite :

$$\begin{aligned} E[M_{PF}^+] &= T + \sum_{s \geq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) \\ &= T + \sum_{s \geq T} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1 + o_2 = s \\ o_1 + o_2 \in \mathbb{Z}}} \left[ Pr[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

$M_{PF}^-$  est une variable aléatoire discrète positive avec un nombre fini de valeurs possibles ( $M_{PF}^- \in [T - \max(U_{k,2}) ; T]$ ).

Son espérance mathématique est calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{PF}^-] &= E[\min(M_{PF}, T)] = \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[\min(M_{PF}, T) \leq s]) \\ &= \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[-\max(-M_{PF}, -T) \leq s]) \\ &= \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[\max(-M_{PF}, -T) \geq -s]) \\ &= \sum_{s \geq 0} Pr[\max(-M_{PF}, -T) \leq -s - 1] \end{aligned}$$

Sachant que  $Pr[\max(-M_{PF}, -T) \leq -s - 1] = Pr[-M_{PF} \leq -s - 1; -T \leq -s - 1]$  et  $M_{PF}$  ne dépend pas de  $T$  alors:

$$Pr[\max(-M_{PF}, -T) \leq -s - 1] = Pr[-M_{PF} \leq -s - 1] \times Pr[-T \leq -s - 1]$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{PF}^-] &= \sum_{s \geq 0} (Pr[-M_{PF} \leq -s - 1] \times Pr[-T \leq -s - 1]) \\ &= \sum_{s \geq 0} Pr[M_{PF} \geq s + 1] \times Pr[T \geq s + 1] \\ &= \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) \times Pr[T \geq s + 1] \end{aligned}$$

Or la date de livraison souhaitée par le client  $T$  est connue et supérieure à 0. Donc :

$$f(x) = \begin{cases} Pr[T \geq s + 1] = 0, & \forall s \geq T \\ Pr[T \geq s + 1] = 1, & \forall s \leq T - 1 \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} E[M_{PF}^-] &= \sum_{0 \leq s \leq T-1} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) \times Pr[T \geq s + 1] \\ &\quad + \sum_{s \geq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) \times Pr[T \geq s + 1] \\ &= \sum_{0 \leq s \leq T-1} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) \times 1 + \sum_{s \geq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) \times 0 \\ &= \sum_{0 \leq s \leq T-1} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) \times Pr[T \geq s + 1] \end{aligned}$$

Et par la suite :



$$\begin{aligned}
E[M_{PF}^-] &= \sum_{0 \leq s \leq T-1} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) \\
&= \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} \left[ Pr[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right] \right) \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Les équations (3.9) et (3.10) sont utilisées pour calculer l'espérance mathématique de la date d'assemblage du produit fini  $E[M_{PF}]$ . Nous notons que pour toute variable aléatoire  $A$ ,  $A = \max(A, T) + \min(A, T) - T$ . Nous déduisons par la suite que  $E[M_{PF}] = E[M_{PF}^+] + E[M_{PF}^-] - T$  et :

$$\begin{aligned}
E[M_{PF}] &= T + \sum_{s \geq T} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} \left[ Pr[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right] \right) \\
&\quad + \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} \left[ Pr[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right] \right) - T \\
E[M_{PF}] &= \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} \left[ Pr[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} P[L_{k,2} \leq -X_{k,2} + o_2] \right] \right) \quad (3.11)
\end{aligned}$$

$M_{i,1}$  est une variable aléatoire discrète positive avec un nombre fini de valeurs possibles ( $M_{i,1} \in [T - U_{k,2} + 1; T - 2 + u_{i,2}]$ ).

Nous utilisons l'expression (3.8) pour calculer son espérance mathématique :

$$E[M_{i,1}] = \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[M_{i,1} \leq s])$$

$$\begin{aligned}
Pr[M_{i,1} \leq s] &= Pr\left[\max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (L_{k,2} + X_{k,2}) \leq s\right] = \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} Pr[L_{k,2} + X_{k,2} \leq s] \\
&= \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + s)
\end{aligned}$$

Par la suite:

$$E[M_{i,1}] = \sum_{s \geq 0} \left(1 - \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + s)\right) \quad (3.12)$$

Par la suite, en utilisant les équations (3.9), (3.10), (3.11) et (3.12), l'espérance mathématique du coût total peut-être déterminée.

$$\begin{aligned}
E[C(X, L)] &= (r \times T) + H \\
&\times \left( \sum_{s \geq T} \left(1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1 + o_2 = s \\ o_1 + o_2 \in \mathbb{Z}}} \left[ Pr[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right] \right) \right) - R \\
&\times \left( \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left(1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1 + o_2 = s \\ o_1 + o_2 \in \mathbb{Z}}} \left[ Pr[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right] \right) \right) \\
&- \sum_{i=1}^{N_1} H_i \sum_{s \geq 0} \left(1 - \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + s)\right) - \sum_{l=1}^2 \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E[L_{i,l}] \right) - \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} X_{i,2}
\end{aligned}$$

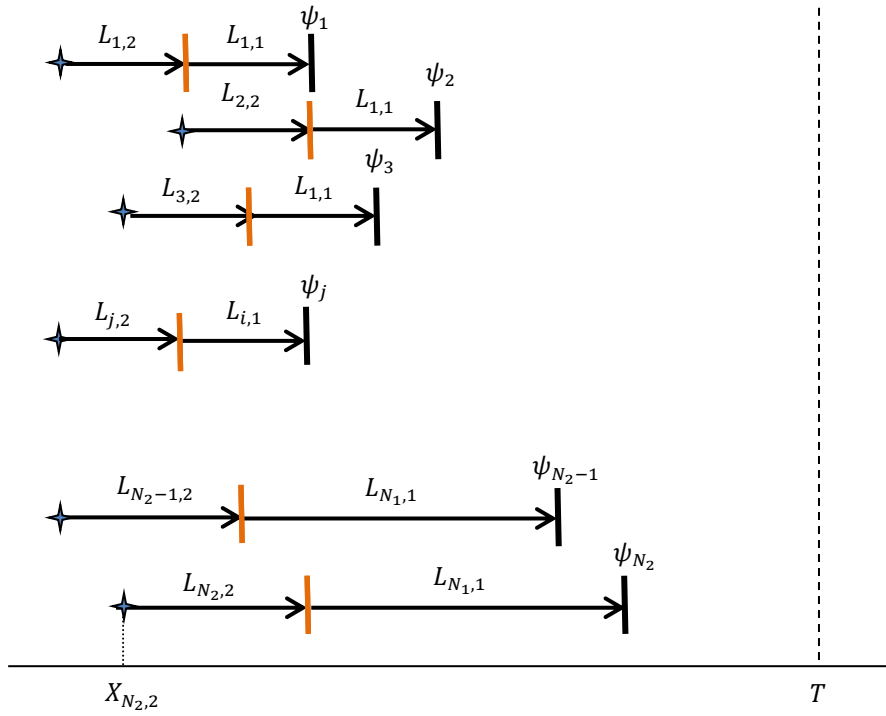
C.Q.F.D.

### 3.4 Réduction de l'espace de recherche initiale

Nous proposons une technique de réduction de l'espace de recherche qui sera utilisée par la suite pour réduire les intervalles des valeurs possibles des  $X_{k,2}$  qui sont initialement

définies sous la forme :  $T - U_{k,2} \leq X_{k,2} \leq T - 2, c_{k,2} \in S_{i,1}$ . Plusieurs propriétés utilisées sont détaillées dans l'annexe.

Soient  $c_{j,2}$  un composant nécessaire à l'assemblage du composant  $c_{i,1}$  et  $\psi_j = L_{i,1} + L_{j,2} + X_{j,2}$ . Nous décomposons le système d'assemblage initial (**Figure 3.3**) en  $N_2$  chaînes linéaires (**Figure 3.4**).  $\psi_j$  est la date de disponibilité de produit fini de la chaîne linéaire  $j$  avec  $j \in \{1, \dots, N_2\}$ .



**Figure 3.4** : Décomposition du système d'assemblage en plusieurs chaînes linéaires

Pour chaque chaîne linéaire  $j \in \{1, \dots, N_2\}$  :

$$E[\psi_j] = E[L_{i,1} + L_{j,2} + X_{j,2}] \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
E[\psi_j] &= \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \sum_{\substack{o_1 + o_2 = s \\ o_1 + o_2 \in \mathbb{Z}}} [Pr[L_{i,1} = o_1] \times Pr[L_{j,2} \leq -X_{j,2} + o_2]] \right) \\
&= \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \sum_{\substack{o_1 + o_2 = s \\ o_1 + o_2 \in \mathbb{Z}}} [Pr[L_{i,1} = o_1] \times F_{j,2}(-X_{j,2} + o_2)] \right)
\end{aligned}$$

Les dates optimales de lancement d'ordre aux fournisseurs  $X_{j,2}^{**}$  sont trouvées par le modèle Newsboy proposé par [Hnaïen et al., 2008]. Les auteurs ont pris en compte le coût de stockage du composant au premier niveau de la chaîne linéaire  $\psi_j$ . Dans notre étude, ce coût est remplacé par le coût de stockage du produit fini.

Soit le quantile d'ordre  $\alpha_j = \frac{b}{b+r}$  de la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète  $L_{i,1} + L_{j,2}$ . Il est la plus petite valeur  $q_{\alpha_j}$  tel que :

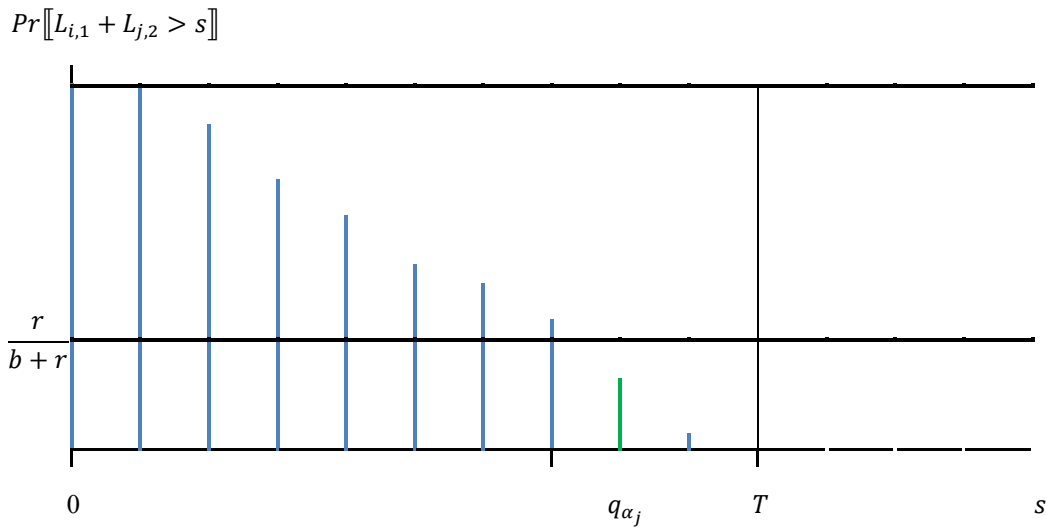
$$\begin{aligned}
Pr[L_{i,1} + L_{j,2} \leq q_{\alpha_j}] &\geq \frac{b}{b+r} \\
\sum_{\substack{o_1 + o_2 = q_{\alpha_j} \\ o_1 + o_2 \in \mathbb{Z}}} (Pr[L_{i,1} = o_1] \times Pr[L_{j,2} \leq o_2]) &\geq \frac{b}{b+r}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

D'après l'expression (3.14), nous déduisons que (voir **Figure 3.5**):

$$\sum_{\substack{o_1 + o_2 = q_{\alpha_j} \\ o_1 + o_2 \in \mathbb{Z}}} (Pr[L_{i,1} = o_1] \times Pr[L_{j,2} > o_2]) \leq \frac{r}{b+r}$$

Et que (voir **Figure 3.5**) :

$$\begin{cases} \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} (Pr[L_{i,1} = o_1] \times Pr[L_{j,2} > o_2]) \geq \frac{r}{b+r}, & s < q_{\alpha_j} \\ \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} (Pr[L_{i,1} = o_1] \times Pr[L_{j,2} > o_2]) \leq \frac{r}{b+r}, & s \geq q_{\alpha_j} \end{cases} \quad (3.15)$$



**Figure 3.5 :** Détermination de  $q_{\alpha_j}$  qui a une probabilité cumulée supérieure ou égale à  $\frac{b}{b+r}$

Les dates optimales  $X_{j,2}^{**}$  sont égales à  $T - q_{\alpha_j}$  et sont déterminées par le modèle Newsboy comme dans l'expression (9) de [Hnaïen et al., 2008].

### **Proposition 3.3**

*L'espace de recherche initial  $[T - U_{k,2}, T - 2]$  est réduit à  $[T - U_{k,2}; T - q_{\alpha_k}]$ ,  $\forall k \in [1; N_2]$ .*

### **Démonstration 3.3**

Supposons qu'il existe un vecteur composé de dates de lancement d'ordre aux fournisseurs  $X^* = (X_{1,2}^*, \dots, X_{N_2,2}^*)$  pour lequel  $E[C(X^*, L)]$  est optimal (il n'est pas unique). Ce vecteur est défini,  $\forall (k, j) \in [1; N_2]^2$ , comme suit :

$$\begin{cases} X_{k,2}^* \in [T - U_{k,2}; T - q_{\alpha_k}], & \forall c_{k,2} \in S_{i,1} \\ & k \neq j \\ X_{j,2}^* \in ]T - q_{\alpha_k}; T - 2], & \forall c_{j,2} \in S_{i,1} \\ & j \neq k \end{cases}$$

C'est-à-dire que, d'une part, il y a des dates de lancement d'ordre aux fournisseurs  $X_{k,2}^*$  qui sont comprises entre  $T - U_{k,2}$  et  $T - q_{\alpha_k}$  ; et d'autre part, il existe aussi des dates de lancement d'ordres aux fournisseurs  $X_{j,2}^*$  qui sont comprises entre  $T - q_{\alpha_k} + 1$  et  $T - 2$ .

Nous démontrons par l'absurde qu'il existe  $A^* = (A_{1,2}^*, \dots, A_{j,2}^*, \dots, A_{N_2,2}^*)$  qui domine  $X^*$  tels que  $\forall c_{k,2} \in S_{k,1}, \forall \delta \in \mathbb{N}, A_{k,2}^* \in [T - U_{k,2}; T - q_{\alpha_k}]$  et  $A_{k,2}^* = X_{k,2}^* - \delta$ . C'est-à-dire que toutes les dates de lancement d'ordre aux fournisseurs sont comprises entre  $T - U_{k,2}$  et  $T - q_{\alpha_k} + 1$ .

Soit  $\varepsilon(A^*, X^*)$  la différence entre : (1) l'espérance mathématique du coût total associée au vecteur  $A^*$  et (2) l'espérance mathématique du coût total associée au vecteur  $X^*$  :

$$\varepsilon(X^*, A^*) = E[C(X^*, L)] - E[C(A^*, L)]$$

La démonstration de l'inégalité  $\varepsilon(A^*, X^*) \geq 0$  est présentée en annexe (Démonstration A.2).

### 3.5 Optimisation

#### 3.5.1 Problème à résoudre

La fonction objectif est non linéaire à variables de décision entières. A partir d'une certaine taille de problème, l'énumération explicite de tout l'espace de recherche devient impossible. A l'aide des techniques de recherche opérationnelle, il est possible de trouver

soit la solution optimale, soit au moins une bonne solution obtenue à l'aide d'une méthode approchée.

Dans cette section, nous introduisons une procédure d'optimisation exacte et efficace de type Procédure par Séparation et Évaluation (PSE) ainsi qu'une borne inférieure et une borne supérieure de la fonction objectif. Différentes techniques, permettant l'amélioration de la PSE, seront également présentées dans les sections suivantes.

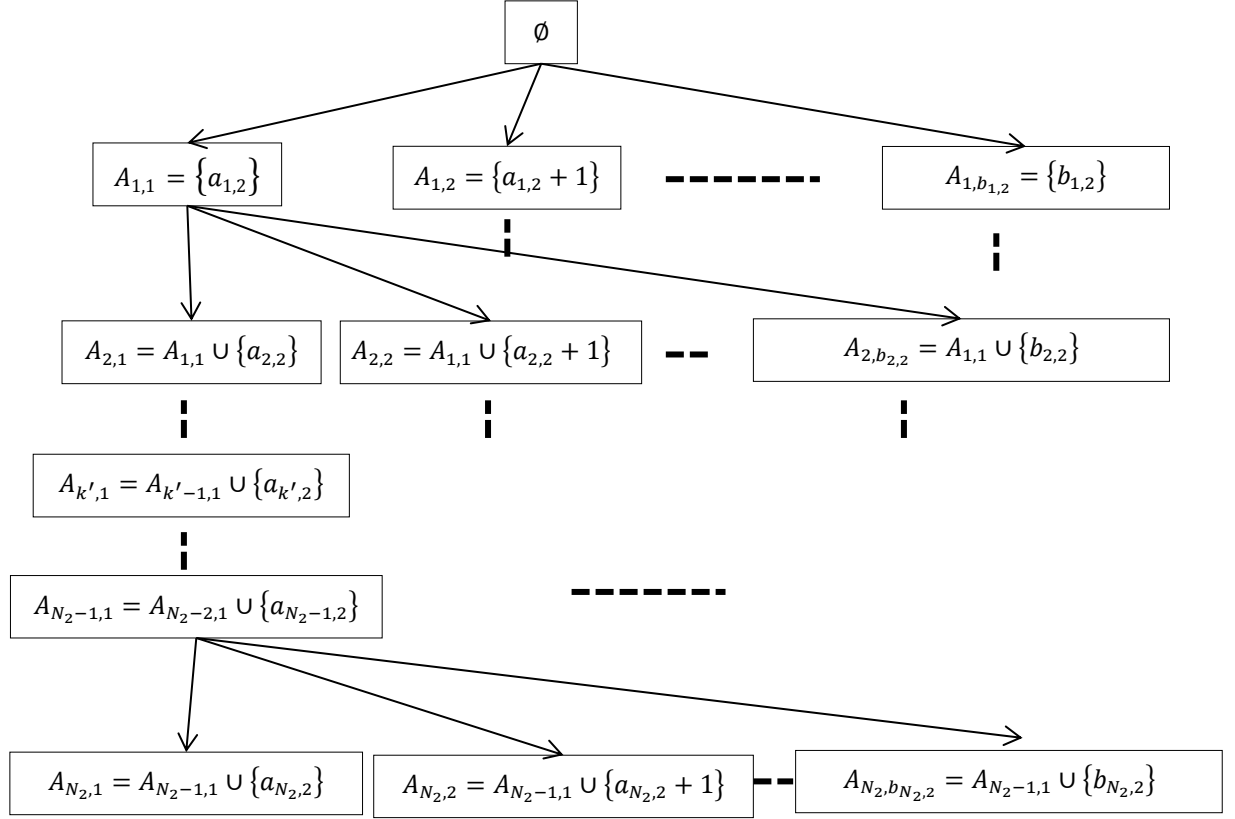
### 3.5.2 Borne supérieure

Dans un premier temps, nous prendrons comme borne supérieure la première solution trouvée par une recherche en profondeur (SC). Dans un deuxième temps nous utiliserons un minimum local (ML).

### 3.5.3 Borne inférieure

Soit  $A = (X_{1,2}, \dots, X_{k,2}, \dots, X_{N_2,2})$  un vecteur qui représente les dates de lancement des composants de type  $c_{i,2}$ . Chaque variable de décision  $X_{k,2}$  est bornée par  $a_{k,2} = T - U_{k,2}$  et  $b_{k,2} = T - 2$ .

Un vecteur  $A_1 = (X_{1,2}, a_{k,2}, \dots, a_{N_2,2})$  sera noté  $A_1 = \{X_{1,2}\}$ . Les nœuds au premier niveau de l'arbre de recherche correspondent aux différentes dates de lancement d'ordres au fournisseur  $X_{1,2}$  du premier composant de la nomenclature. Les vecteurs liés à ces nœuds sont définis comme suit:  $A_{1,i} = (a_{1,2} + i, \dots, a_{k,2}, \dots, a_{N_2,2})$  avec  $i \in [0; b_{k,2}]$ . Ils seront, par la suite, écrits  $A_{1,i} = \{a_{1,2} + i\}$ . La première valeur  $a_{1,2} + i$  correspond à la date de lancement d'ordre au fournisseur du premier composant. Les dates de lancement d'ordre au fournisseur d'autres composants sont égales à  $a_{k,2}$  (**Figure 3.6**).



**Figure 3.6 :** Représentation de l'arbre d'exploration

Soit le vecteur  $A_{k',X_{k',2}} = (X_{1,2}, \dots, X_{k',2}, a_{k'+1,2}, \dots, a_{N_2,2})$  qui définit un nœud  $k'$  de l'arborescence. Ce vecteur de dates de lancement d'ordres d'approvisionnement est composé comme suit :

- $\forall k \in [1; k' - 1], X_{k,2}$  sont fixes et appartiennent à  $[a_{k,2}; b_{k,2}]$  (3.16)

- $X_{k',2}$  est fixe et appartient à  $[a_{k',2}; b_{k',2}]$  (3.17)

- $\forall k \in [k' + 1; N_2], X_{k,2}$  sont fixes et égales à  $a_{k,2}$  (3.18)



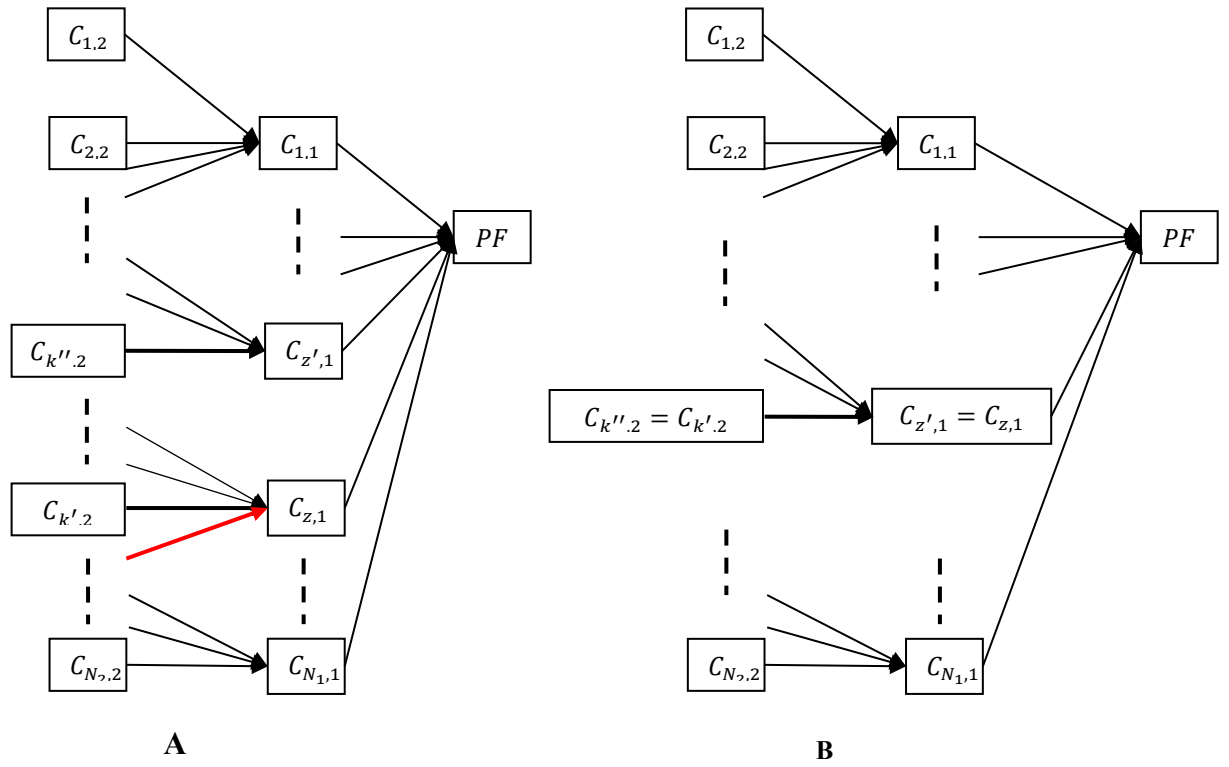
Nous rappelons que  $a_{k,2} = T - U_{k,2}$  et  $b_{k,2} = T - 2$ , et pour la suite, nous introduisons plusieurs notations :

- Le composant  $c_{k',2}$  est nécessaire pour l'assemblage du composant  $c_{z,1}$ , il est le  $k' - \text{ème}$  composant dans l'ordre de l'arborescence.
- $k''$  est défini comme suit : (3.19)
  - Si  $c_{k',2}$  est le dernier composant nécessaire à l'assemblage de  $c_{z,1}$  alors  $k'' = k'$  (voir le système d'assemblage B dans la **Figure 3.7**).
  - Si  $c_{k',2}$  n'est pas le dernier composant nécessaire à l'assemblage de  $c_{z,1}$  alors  $k''$  est égale à la somme des composants nécessaires à l'assemblage des composants  $c_{i,1} \forall i \in [1; z]$  du premier niveau de la nomenclature (voir le système d'assemblage A dans la **Figure 3.7**).
- Le composant  $c_{k'',2}$  est nécessaire pour l'assemblage du composant  $c_{z',1}$

Nous notons que lorsque  $k'' = k'$ ,  $z = z'$ .

Par la suite, nous introduisons deux nouvelles notations :

- $M_{PF}^+_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}$  le maximum entre  $M_{PF}$  et  $T$  où  $M_{PF}$  est la date d'assemblage du produit fini dont les dates de lancement d'ordres d'approvisionnement  $X_{k,2}$  appartiennent aux intervalles de recherche  $[a_{k,2}; b_{k,2}]$  avec  $a_{k,2} = T - U_{k,2}$  et  $b_{k,2} = T - 2$ .
- $M_{PF}^+_{\forall k > k'_2; X_{k,2} = a_{k,2}}$  le maximum entre  $M_{PF}$  et  $T$  où  $M_{PF}$  est la date d'assemblage du produit fini dont les dates de lancement d'ordres d'approvisionnement  $X_{k,2}$  sont détaillées dans les expressions (3.17), (3.18) et (3.19).



**Figure 3.7 :** Position d'un composant  $c_{k',2}$  dans la nomenclature.

**Proposition 3.4**

La borne inférieure qui correspond au vecteur  $A_{k',x_{k',2}}$  est composée :

- Du coût moyen de stockage des  $k'$  premiers composants du deuxième niveau de la nomenclature. Ces composants ont des dates de lancement d'ordres d'approvisionnement fixes (voir expressions 3.17, 3.18 et 3.19) :

$$E[C_{sc_2}, A_{k'}] = \sum_{i=1}^z \left( \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{i,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( E \left[ M_{\forall k > k'; X_{k,2}=a_{k,2}}^{i,1} \right] - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \right)$$

- Du coût moyen de stockage des  $z'$  premiers composants du premier niveau de la nomenclature :

$$E[C_{sc_1}, A_{k'}] = \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ M_{\forall k > k'; X_{k,2}=a_{k,2}}^{PF} \right] - E[M_{i,1}] - E[L_{i,1}] \right) \right)$$

- Du coût moyen de rupture en produit fini correspondant au vecteur  $A_{k', X_{k',2}}$  dont les dates qui le composent sont définies dans les expressions (3.17), (3.18) et (3.19) :

$$E[C_{bPF}, A_{k'}] = b \left( E \left[ M_{\forall k > k'_2; X_{k,2}=a_{k,2}}^+ \right] - T \right)$$

La borne inférieure est égale à la somme des trois coûts ci-dessus:

$$\begin{aligned} BI(A_{k', X_{k',2}}) &= \left( -h_{i,1} + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k'' < k \leq k'}} h_{k,2} + \sum_{i=1}^{z'} \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \right) \left( E \left[ M_{\forall k > k'; X_{k,2}=a_{k,2}}^{i,1} \right] \right) \\ &+ \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) \left( E \left[ M_{\forall k > k'_2; X_{k,2}=a_{k,2}}^+ \right] \right) + \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ M_{\forall k > k'_2; X_{k,2}=a_{k,2}}^- \right] \right) \right) \\ &- \sum_{i=1}^{k'} h_{i,2} (E[L_{i,2}] + X_{i,2}) - T \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) - \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} (E[L_{i,1}]) \end{aligned}$$

Avec:

$$(z, z') \in [1; N_1]^2, c_{k',2} \in S_{z,1}, c_{k'',2} \in S_{z',1}, c_{k''+1,2} \in S_{z'+1,1}, k'' \leq k', z-1 \leq z' \leq z.$$

### **Démonstration 3.4**

Nous démontrons que  $BI(A_{k'}) = BI(A_{k', X_{k',2}})$  est une borne inférieure de  $E[C(A_{N_2}, L)]$  pour un nœud du  $k' - \text{ème}$  niveau de l'arbre d'exploration. Pour cela, Nous prouvons en annexe (Démonstration A.3) que  $BI(A_{k'}) \leq E[C(A_{k', X_{k',2}}, L)]$ .

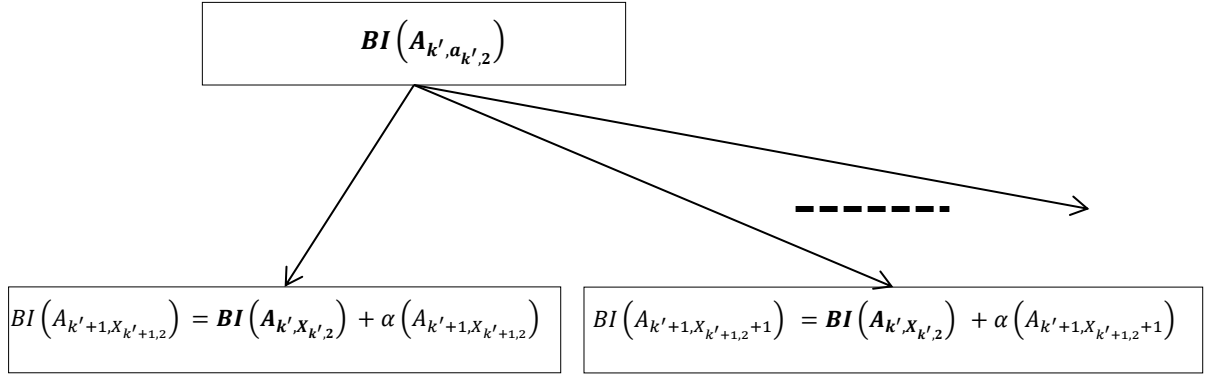
Dans un premier temps, afin de diminuer le temps de calcul, nous avons essayé de minorer l'espérance mathématique  $E \left[ \max_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}} M_{PF} \right]$  de la date d'assemblage du produit fini par le maximum des dates moyennes de disponibilité des produits finis des chaînes linéaires  $\max_{1 \leq k \leq k'} \{E[\psi_k]\}$  (voir l'expression (3.13)). Le calcul de ce maximum ne demande que peu de temps. Néanmoins, la borne inférieure a été de mauvaise qualité.

Afin de garantir une meilleure borne inférieure, nous avons opté pour la borne inférieure donnée ci-dessus. Par la suite, nous simplifions le calcul de cette borne en explorant les relations de dépendance entre les nœuds. Cette technique permettra de réduire considérablement le temps de calculs sans pour autant réduire la qualité de la borne inférieure.

### 3.5.4 Dépendance verticale entre les bornes inférieures

Nous remarquons par la suite que, quand nous explorons l'arbre en profondeur, une partie du coût moyen de stockage des composants du dernier niveau est toujours fixe (**Figure 3.8**).

Soit  $BI(A_{k', X_{k',2}})$  la borne inférieure qui correspond au vecteur  $A_{k', X_{k',2}} = (X_{1,2}, \dots, X_{k',2}, a_{k'+1,2}, \dots, a_{N_2,2})$ .



**Figure 3.8 :** Simplification verticale dans le calcul de la borne inférieure

Nous scindons la borne inférieure en deux parties. Cette technique rappelle la borne inférieure du problème du sac à dos ([Kellerer et al., 2004] et [Martello and Toth, 1990]).

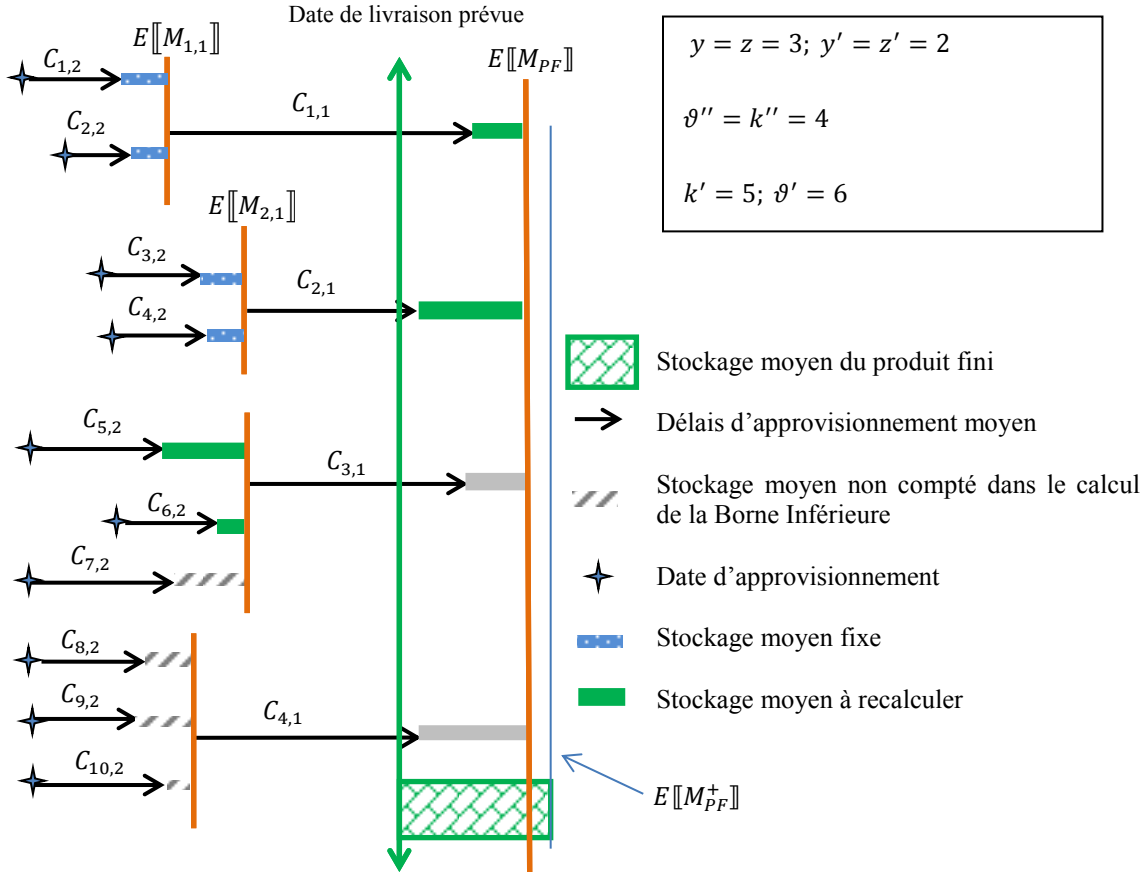
Soit le nœud  $\vartheta' = k' + 1$ . La borne inférieure  $BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta',2}}) = BI(A_{k'+1, X_{k'+1,2}})$  est égale à la somme de la borne inférieure  $BI(A_{k', X_{k',2}})$  du nœud parent  $k'$  de l'arborescence et d'une variable  $\alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta',2}}) = \alpha(A_{k'+1, X_{k'+1,2}})$ .

La variable  $\alpha$  dépend de la position de  $k'$  par rapport à  $k''$  (voir l'expression (3.19)). D'où trois cas différents :

Premier cas :

Soient deux nœuds  $A_{k', X_{k',2}}$  du  $k'$  – ème niveau de l'arborescence (dont le vecteur lié est défini comme suit :  $A_{k', X_{k',2}} = (X_{1,2}, \dots, X_{k',2}, a_{k'+1,2}, \dots, a_{N_2,2})$ ) et  $A_{\vartheta', X_{\vartheta',2}}$  du  $\vartheta'$  – ème ( $= (k' + 1)$ ème) niveau de l'arborescence (le vecteur lié est défini sous la forme :  $A_{\vartheta', X_{\vartheta',2}} = (X_{1,2}, \dots, X_{k',2}, X_{\vartheta',2}, a_{\vartheta'+1,2}, \dots, a_{N_2,2})$ ).

Prenons l'exemple du système d'assemblage présenté dans la **Figure 3.9**. Il y a 10 composants de type  $c_{k,2}$  au deuxième niveau, et 4 composants de type  $c_{i,1}$  au premier niveau. Les composants  $c_{5,2}$ ,  $c_{6,2}$  et  $c_{7,2}$  sont nécessaires pour assembler le composant  $c_{3,1}$ .



**Figure 3.9 :** Exemple illustrant le 1<sup>er</sup> cas.

Soient  $a_{i,2} = T - U_{i,2} = 0$  (pour simplifier l'écriture : mettre 0 dans les vecteurs là où les dates de lancement d'ordres d'approvisionnement sont égales à  $a_{i,2}$ ).

Le vecteur  $A_{5,a_{5,2}} = (X_{1,2}, \dots, X_{5,2}, 0, \dots, 0)$  est utilisé pour calculer la borne inférieure  $BI(A_{5,X_{5,2}})$  du 5<sup>ème</sup> niveau de l'arborescence. Cette borne est composée de :

1. L'espérance mathématique des coûts de stockage des composants  $c_{1,2}, \dots, c_{5,2}$  du deuxième niveau  $E[C(c_{1,2}, \dots, c_{5,2})] = \sum_{i=1}^5 E[C(c_{i,2})]$
2. L'espérance mathématique des coûts de stockage des composants  $c_{1,1}$  et  $c_{2,1}$  du premier niveau  $E[C(c_{1,1}, c_{2,1})] = \sum_{i=1}^2 E[C(c_{i,1})]$
3. L'espérance mathématique du coût de rupture en produit fini  $E[C(PF)]$

Le vecteur  $A_{6,X_{6,5}} = (X_{1,2}, \dots, X_{6,2}, \dots, 0)$  est utilisé pour calculer la borne inférieure  $BI(A_{6,X_{6,5}})$  du 6<sup>ème</sup> niveau de l'arborescence. Cette borne est composée de :

1. L'espérance mathématique des coûts de stockage des composants  $c_{1,2}, \dots, c_{6,2}$  du deuxième niveau  $E[C(c_{1,2}, \dots, c_{6,2})] = \sum_{i=1}^6 E[C(c_{i,2})]$
2. L'espérance mathématique des coûts de stockage des composants  $c_{1,1}$  et  $c_{2,1}$  du premier niveau  $E[C(c_{1,1}, c_{2,1})] = \sum_{i=1}^2 E[C(c_{i,1})]$
3. L'espérance mathématique du coût de rupture en produit fini  $E[C(PF)]$

Le calcul de la borne  $BI(A_{6,X_{6,5}})$  utilise une partie du calcul (déjà fait) de la borne  $BI(A_{5,X_{5,2}})$ . Dans la **Figure 3.9** cette partie du coût déjà calculé est appelée « stockage moyen fixe ». Elle est égale aux coûts de stockage des quatre premiers composants  $c_{1,2}, \dots, c_{4,2}$  du deuxième niveau ( $\vartheta'' = k'' = 4$ ). Ces coûts restent fixes puisque les dates d'approvisionnement  $X_{1,2}, \dots, X_{4,2}$  sont déjà fixes.

La variation de la date d'approvisionnement du composant  $c_{6,2}$  modifie :

- Le coût de stockage du composant  $c_{5,2}$ ,
- Le coût de stockage des composants  $c_{1,1}$  et  $c_{2,1}$  du premier niveau,
- Le coût de rupture en produit fini.

Donc afin de déterminer  $BI(A_{6,x_{6,5}})$ , nous devons calculer les coûts de stockage de  $c_{5,2}$  et  $c_{6,2}$  (les composants de  $v''$  à  $v'$ ). Comme le composant  $c_{6,2}$  n'est pas le dernier composant nécessaire à l'assemblage de  $c_{3,1}$ , nous avons seulement besoin de calculer le coût de stockage des 2 premiers composants de type  $c_{i,1}$  ( $y' = 2$ ).

Deuxième cas :

La seule différence dans le calcul de  $\alpha(A_{\theta',x_{\theta',2}})$  dans ce deuxième cas (voir l'exemple dans la **Figure 3.10**), c'est que le composant  $c_{7,2}$  est le dernier composant nécessaire à l'assemblage de  $c_{3,1}$ . Nous avons besoin de :

- Calculer le coût de stockage du composant  $c_{7,2}$  et du composant  $c_{3,1}$
- Recalculer les coûts de stockage des composants  $c_{5,2}$  et  $c_{6,2}$  du deuxième niveau et les coûts de stockage des composants  $c_{1,1}$  et  $c_{2,1}$  du premier niveau



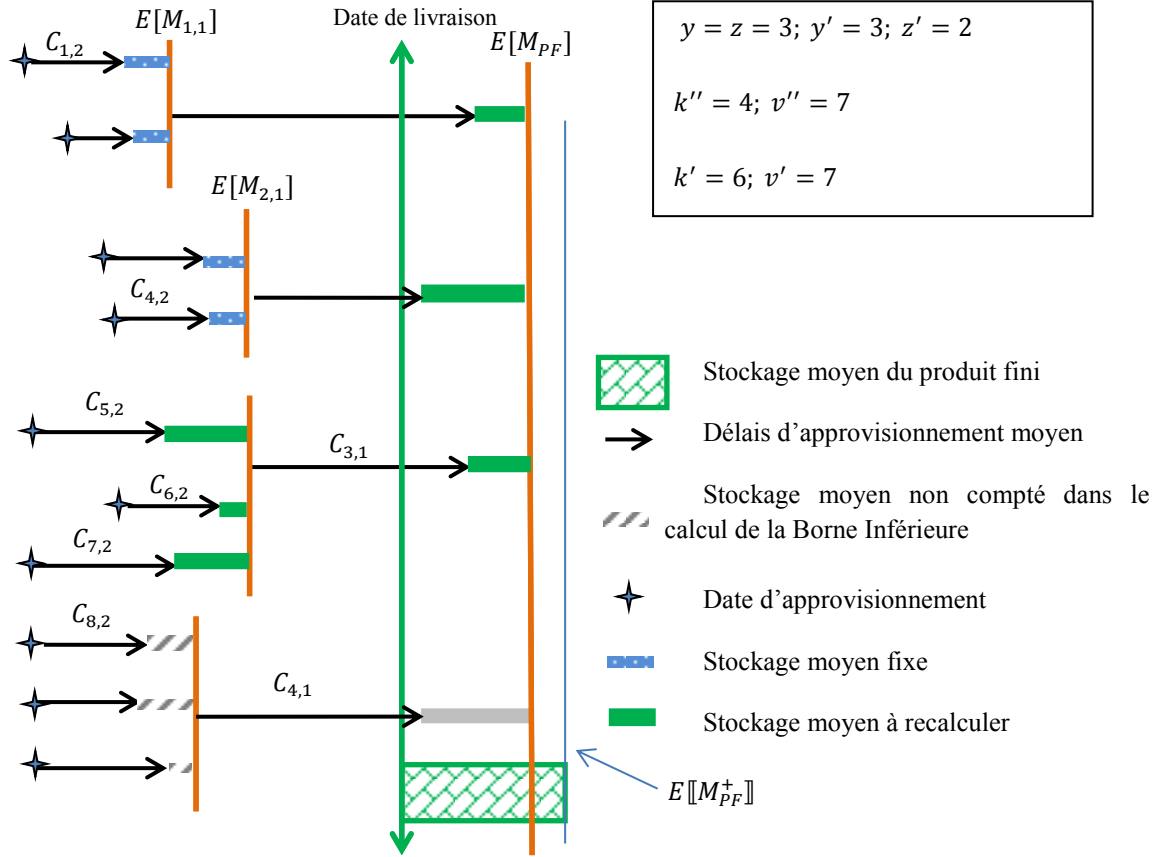


Figure 3.10 : Exemple illustrant le 2<sup>ème</sup> cas.

Troisième cas :

La seule différence dans le calcul de  $\alpha(A_{\theta', X_{\theta', 2}})$  dans ce troisième cas ( $\alpha(A_{8, X_{8, 2}})$  dans l'exemple dans la Figure 3.11), c'est que le composant  $c_{\theta', 2}$  ( $c_{8, 2}$  dans le même exemple) est le premier composant nécessaire à l'assemblage de  $c_{y', 1}$  ( $c_{4, 1}$  dans le même exemple). Les coûts de stockages des composants  $c_{1, 2}, \dots, c_{7, 2}$  sont récupérés de  $BI(A_{7, X_{7, 2}})$  et ne sont pas à recalculer. Nous avons donc besoin, comme dans le cas précédent, de :

- Recalculer le coût de stockage des trois premiers composants de type  $c_{i, 1}$  ( $y = 3$ )

- Calculer le coût de stockage du composant  $c_{8,2}$  ( $\vartheta' = 8$ )

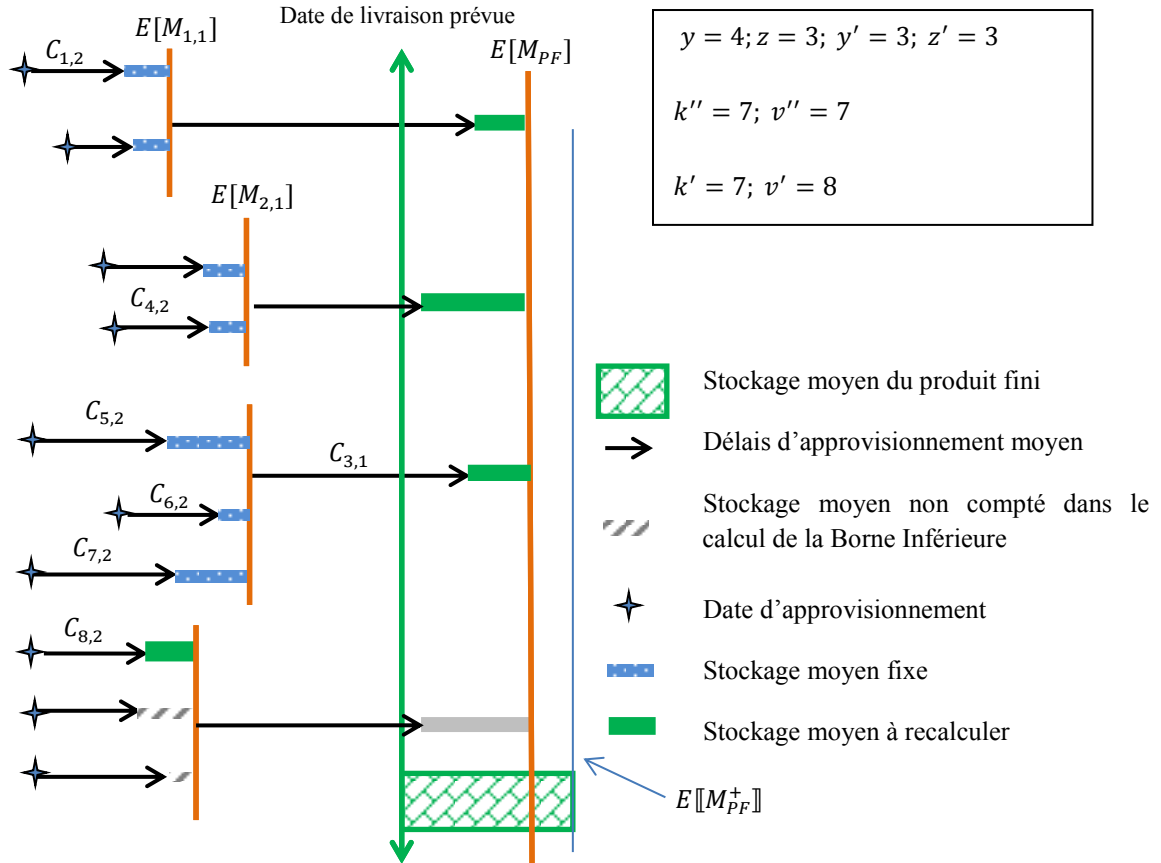


Figure 3.11 : Exemple illustrant le 3<sup>ème</sup> cas.

Cette technique permet de gagner en temps de calculs et éviter de recalculer cette partie fixe à chaque nœud.

### Proposition 3.5

L'évaluation d'un nœud fils utilise l'évaluation d'un nœud père. La borne inférieure  $BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}})$  à un nœud  $X_{\vartheta', 2} = X_{k'+1, 2}$  est égale à la somme de la borne inférieure

$BI(A_{k',X_{k',2}})$  du nœud parent  $X_{k',2}$  de l'arborescence et d'une variable  $\alpha(A_{\vartheta',X_{\vartheta',2}}) = BI(A_{\vartheta',X_{\vartheta',2}}) - BI(A_{k',X_{k',2}})$  qui, pour  $z \in \mathbb{N}$ ,  $c_{k',2} \in S_{z,1}$ , et  $z' \in \mathbb{N}$ ,  $c_{k'',2} \in S_{z',1}$ ,  $c_{k''+1,2} \in S_{z'+1,1}$  et  $k'' \leq k'$  est égale à :

Premier cas :

Si  $y = z$ ,  $y' = z'$ ,  $\vartheta'' = k''$ ,  $c_{\vartheta',2} \in S_{y,1}$ ,  $c_{\vartheta'',2} \in S_{y',1}$ ,  $c_{\vartheta''+1,2} \in S_{y'+1,1}$  et  $\vartheta'' \leq \vartheta'$  :

$$\begin{aligned} \alpha(A_{\vartheta',X_{\vartheta',2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) \left( E \llbracket M_{PF\{A_{\vartheta'}\}}^+ \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{A_{k'}\}}^+ \rrbracket \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \llbracket M_{PF\{A_{\vartheta'}\}}^- \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{A_{k'}\}}^- \rrbracket \right) \right) - \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k'' < k \leq k'}} h_{k,2} E \llbracket M_{z,1} \rrbracket \\ &\quad + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{y,1} \\ k'' < k \leq \vartheta'}} h_{k,2} E \llbracket M_{y,1} \rrbracket - h_{\vartheta',2} (E \llbracket L_{\vartheta',2} \rrbracket + X_{\vartheta',2}) \end{aligned}$$

Deuxième cas :

Si  $y = z$ ,  $y' = z' + 1$ ,  $\vartheta'' \neq k''$ ,  $c_{\vartheta',2} \in S_{y,1}$ ,  $c_{\vartheta'',2} \in S_{y',1}$ ,  $c_{\vartheta''+1,2} \in S_{y'+1,1}$  et  $\vartheta'' \leq \vartheta'$  :

$$\begin{aligned} \alpha(A_{\vartheta',X_{\vartheta',2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{y'} h_{i,1} + b \right) E \llbracket M_{PF\{A_{\vartheta'}\}}^+ \rrbracket - \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) E \llbracket M_{PF\{A_{k'}\}}^+ \rrbracket \\ &\quad + \sum_{i=1}^{y'} h_{i,1} E \llbracket M_{PF\{A_{\vartheta'}\}}^- \rrbracket - \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} E \llbracket M_{PF\{A_{k'}\}}^- \rrbracket \\ &\quad + \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{y',1}} h_{k,2} - h_{y',1} \right) E \llbracket M_{y',1} \rrbracket - h_{\vartheta',2} (E \llbracket L_{\vartheta',2} \rrbracket + X_{\vartheta',2}) - h_{y',1} E \llbracket L_{y',1} \rrbracket \\ &\quad - \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k'' < k \leq k'}} h_{k,2} E \llbracket M_{z,1} \rrbracket \end{aligned}$$

Troisième cas :

Si  $y = z + 1$ ,  $y' = z'$ ,  $\vartheta'' = k''$ ,  $c_{\vartheta',2} \in S_{y,1}$ ,  $c_{\vartheta'',2} \in S_{y',1}$ ,  $c_{\vartheta''+1,2} \in S_{y'+1,1}$  et  $\vartheta'' \leq \vartheta'$  :

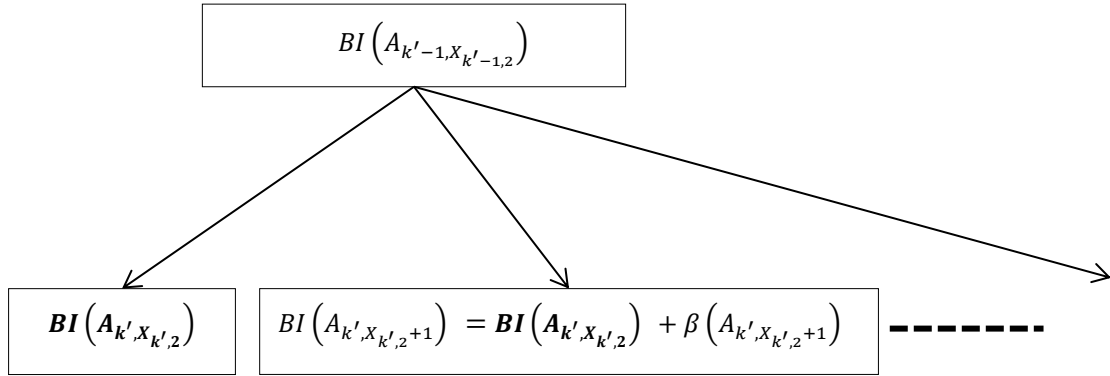
$$\begin{aligned} \alpha(A_{\vartheta',X_{\vartheta',2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) \left( E \llbracket M_{PF\{A_{\vartheta'}\}}^+ \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{A_{k'}\}}^+ \rrbracket \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} E \left( E \llbracket M_{PF\{A_{\vartheta'}\}}^- \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{A_{k'}\}}^- \rrbracket \right) + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{y,1} \\ v'' < k \leq v'}} h_{k,2} E \llbracket M_{y,1} \rrbracket \\ &\quad - h_{\vartheta',2} E \llbracket L_{\vartheta',2} \rrbracket - h_{\vartheta',2} X_{\vartheta',2} \end{aligned}$$

La démonstration complète est présentée en annexe (Démonstration A.4).

### 3.5.5 Dépendance horizontale entre les bornes inférieures

Nous remarquons par la suite que, lorsqu'on explore l'arbre horizontalement, une partie du coût de stockage des composants du dernier niveau de la nomenclature est toujours fixe.

Comme dans la proposition précédente, nous scindons la borne inférieure en deux parties (**Figure 3.12**). La borne inférieure  $BI(A_{k',X_{k',2}+1})$  pour un nœud  $X_{k',2} + 1$  est égale à la somme de la borne inférieure  $BI(A_{k',X_{k',2}})$  du nœud  $X_{k',2}$  de l'arborescence et d'une variable  $\beta(A_{k',X_{k',2}+1})$ .



**Figure 3.12** : Simplification horizontale dans le calcul de la borne inférieure

**Proposition 3.6**

L'évaluation d'un nœud  $a_{k',2}$  utilise de l'évaluation d'un nœud  $X_{k',2} + 1$  (**Figure 3.12**). Nous notons aussi que la borne inférieure  $BI(A_{k',X_{k',2}+1})$  pour un nœud  $X_{k',2} + 1$  est égale à la somme de la borne inférieure  $BI(A_{k'})$  du nœud parent  $a_{k',2}$  de l'arborescence et d'une variable  $\beta(A_{k',X_{k',2}+1}) = BI(A_{k',X_{k',2}+1}) - BI(A_{k'})$  qui, pour  $z \in \mathbb{N}$ ,  $c_{k',2} \in S_{z,1}$ , et  $z' \in \mathbb{N}$ ,  $c_{k'',2} \in S_{z',1}$ ,  $c_{k''+1,2} \in S_{z'+1,1}$ ,  $z \geq z'$  et  $k'' \leq k'$ , est égale à:

- Si  $z > z'$  :

$$\begin{aligned} \beta(A_{k',X_{k',2}+1}) = & \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) \left( E \left[ M_{PF}^+ \{A_{k',X_{k',2}+1}\} \right] - E \left[ M_{PF}^+ \{A_{k',X_{k',2}}\} \right] \right) \\ & + \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} E \left( E \left[ M_{PF}^- \{A_{k',X_{k',2}+1}\} \right] - E \left[ M_{PF}^- \{A_{k',X_{k',2}}\} \right] \right) \\ & + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k'' < k \leq k'}} h_{k,2} \left( E \left[ M_{z,1} \{A_{k',X_{k',2}+1}\} \right] - E \left[ M_{z,1} \{A_{k',X_{k',2}}\} \right] \right) - h_{k',2} \end{aligned}$$

- Si  $z = z'$  :

$$\begin{aligned} \beta(A_{k',X_{k',2}+1}) = & \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) \left( E \left[ M_{PF}^+ \{A_{k',X_{k',2}+1}\} \right] - E \left[ M_{PF}^+ \{A_{k',X_{k',2}}\} \right] \right) \\ & + \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} E \left( E \left[ M_{PF}^- \{A_{k',X_{k',2}+1}\} \right] - E \left[ M_{PF}^- \{A_{k',X_{k',2}}\} \right] \right) \\ & + \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{z,1}} (h_{k,2}) - h_{z,1} \right) \left( E \left[ M_{z,1} \{A_{k',X_{k',2}+1}\} \right] - E \left[ M_{z,1} \{A_{X_{k',2}}\} \right] \right) - h_{k',2} \end{aligned}$$

### Démonstration 3.6

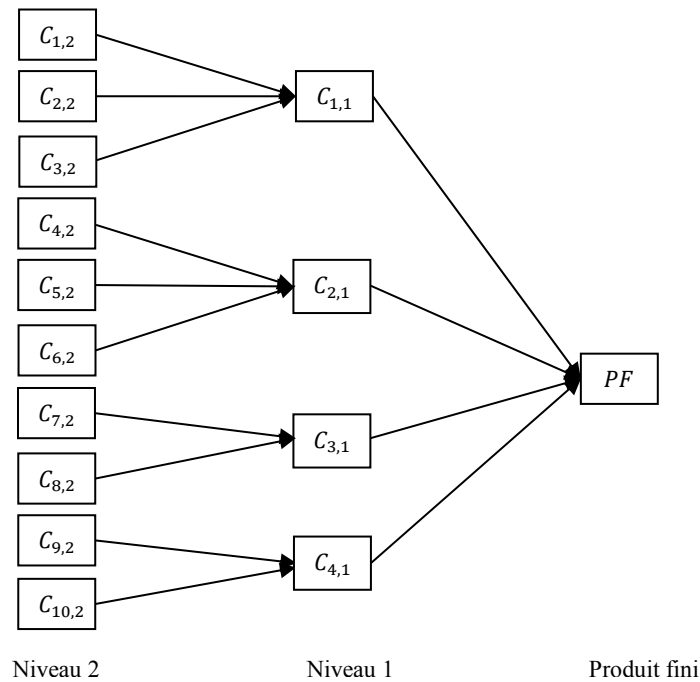
La démonstration est faite de la même manière que celle de la proposition (3.5).

## 3.6 Étude expérimentale et résultats

Afin de vérifier l'efficacité de notre algorithme, nous présentons un système d'assemblage avec 10 composants au deuxième niveau. Dans la partie suivante, nous analysons les résultats obtenus pour des instances où le nombre de composants au niveau 2 de la nomenclature  $N_2$  est inférieur à 100.

### 3.6.1 Exemples numériques

Considérons l'exemple suivant d'un système d'assemblage à deux niveaux. Le niveau 1 est constitué de quatre composants ( $N_1 = 4$ ), chacun d'eux s'obtiennent en assemblant des composants de niveau 2 (**Figure 3.13**).



**Figure 3.13 :** Présentation de la nomenclature.

La date livraison  $T$  est égale à 10. Le coût unitaire de rupture en produit fini  $b$  est égal à 1000 et le coût de stockage  $r$  du même produit est de 200. Les valeurs maximales de tous les délais d'approvisionnement sont égales à 5. Les lois de probabilités des délais d'approvisionnement sont reportées dans le **Tableau 3.2**. Par exemple, on peut lire dans ce tableau que, la probabilité que le composant  $c_{1,1}$  soit livré après une période est égale à 0,85, après deux périodes 0,07, après trois périodes 0,05, après quatre périodes 0,02 et après cinq périodes 0,01.

**Tableau 3.2 : Loi de distribution des délais d'approvisionnement**

Niveau de la nomenclature	$w$	1	2	3	4	5
1	$Pr[L_{1,1} = w]$	0,85	0,07	0,05	0,02	0,01
	$Pr[L_{2,1} = w]$	0,6	0,2	0,1	0,05	0,05
	$Pr[L_{3,1} = w]$	0,3	0,6	0,05	0,03	0,02
	$Pr[L_{4,1} = w]$	0,7	0,2	0,05	0,04	0,01
2	$Pr[L_{1,2} = w]$	0,5	0,3	0,1	0,05	0,05
	$Pr[L_{2,2} = w]$	0,7	0,2	0,05	0,04	0,01
	$Pr[L_{3,2} = w]$	0,09	0,01	0,1	0,35	0,45
	$Pr[L_{4,2} = w]$	0,01	0,1	0,6	0,2	0,09
	$Pr[L_{5,2} = w]$	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1
	$Pr[L_{6,2} = w]$	0,7	0,2	0,05	0,04	0,01
	$Pr[L_{7,2} = w]$	0,5	0,3	0,1	0,05	0,05
	$Pr[L_{8,2} = w]$	0,25	0,15	0,2	0,2	0,2
	$Pr[L_{9,2} = w]$	0,15	0,3	0,2	0,15	0,2
	$Pr[L_{10,2} = w]$	0,7	0,2	0,05	0,04	0,01

Les coûts de stockage des composants sont présentés dans le **Tableau 3.3**.

**Tableau 3.3 : Les coûts de stockage des composants**

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$h_{i,2}$	33	7	1	22	6	2	11	6	6	3
$h_{i,1}$	55	41	32	12						

Nous avons présenté un exemple avec  $N_1 = 4, N_2 = 10$ . Nous supposons que pour chaque composant, le délai de livraison maximal  $u_{i,l}$  est égal à 5 périodes. Le cardinal de l'espace de recherche initiale est donc égal à  $9^{10}$  solutions. Le **Tableau 3.4** présente les limites supérieures  $\sigma(X_{i,2}^*)$  de l'espace de recherche réduit pour les variables de décision  $X_{i,2}$ ,  $i = 1, \dots, 10$ , obtenues après la réduction de l'espace de recherche (voir section 3.4). Rappelons que les valeurs de ces variables ont été initialement comprises entre 0 et 8 ( $T - 2$ ). La technique permettant la réduction de l'espace de recherche l'a diminué de 99.271% (espace de recherche finale égal à  $4^2 \times 5^2 \times 6^4 \times 7^2$  solutions).

**Tableau 3.4** : Espace de recherche

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(X_{i,2}^*)$	6	7	4	4	6	6	6	5	5	7

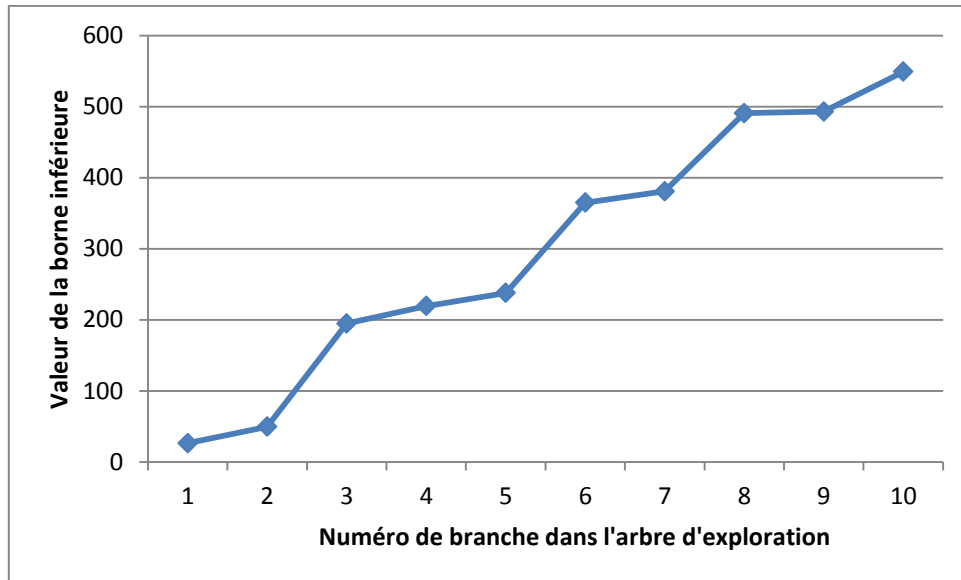
En utilisant la PSE-IR-ML (PSE renforcée par le calcul de l'Intervalle de recherche Réduit (IR) et une borne supérieure ou égale à un Minimum Local (ML)), le coût minimal a été trouvé en 0,068 secondes et vaut 549,116. Les dates de lancement sont présentées dans le **Tableau 3.5**.

**Tableau 3.5** : Dates d'approvisionnement optimales

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_{i,2}^*$	4	4	1	2	1	2	3	1	1	3

L'évolution de la borne inférieure à chaque niveau de l'arbre de la recherche est présentée dans la **Figure 3.14**. Elle dépend de la nomenclature et des coûts de stockage des différents composants. Nous apercevons que si nous classons en ordre croissant les coûts de stockage de tous les composants  $c_{k,2} \in S_{i,1}$  nécessaires pour l'assemblage d'un composant  $i$ , nous obtenons une convergence plus rapide de la borne inférieure.





**Figure 3.14 :** L'évolution de la borne inférieure

Le **Tableau 3.6** montre l'effet de renforcement de la PSE avec un IR et une borne supérieure égale à un ML. L'utilisation à la fois de ces deux techniques permet de réduire, par rapport à la PSE, le temps de calcul ( $CPU_{réduction}$ ) de plus de 78%. Le pourcentage du nombre de branches finales gardées ( $bf g\%$ ) par rapport au nombre total de solutions possibles, est de moins de 1%.

**Tableau 3.6 :** L'effet des différentes techniques sur le comportement de la Procédure par Séparation et Évaluation

Procédure utilisée	PSE+IR	PSE+ML	PSE+IR+ML	PSE
$bf g\%$	4,08%	0,92%	0,71%	5,25%
$CPU_{réduction}$	29,37%	67,19%	78,91%	-

### 3.6.2 Tests numériques du comportement de la PSE

Nous présentons, dans la partie qui suit, les résultats numériques pour des instances dont le nombre des composants au niveau 2 est inférieur à 50.

Les tests consistaient à exécuter l'algorithme sur 50 instances générées d'une manière aléatoire. Pour ces instances, le nombre de composants au niveau 2 a été choisi parmi les

valeurs suivantes [10, 20, 30, 40, 50]. Pour chaque nombre de composants, 10 instances différentes ont été générées.

Les données de chaque instance sont :

- La fonction de distribution des délais d'approvisionnements des composants avec le délai de livraison maximal  $u_{i,l}$  égal à 5 périodes,
- Les coûts unitaires de stockage des composants,
- Le coût unitaire de stockage du produit fini,
- Le coût unitaire de rupture en produit fini,
- Le nombre des composants au niveau 1 nécessaires pour l'assemblage d'un produit fini,
- Le nombre des composants de niveau 2 nécessaires pour l'assemblage de chaque type de composants de niveau 1.

En utilisant la PSE-IR-ML proposée précédemment, les instances de taille supérieure à 30 n'ont pas été résolues dans un temps d'une heure compte tenu du cardinal très important de l'espace de recherche dans ce cas-là (voir le **Tableau 3.7**).

Les résultats montrent l'efficacité de la PSE pour des problèmes de petite taille et de taille moyenne. La résolution optimale du problème dépend fortement de la qualité des bornes inférieures et supérieures. L'utilisation d'un minimum local en tant que borne supérieure a permis de réduire significativement le temps de calcul ainsi le nombre de feuilles explorées.

**Tableau 3.7** : Le temps moyen de calcul (en secondes)

$N_2$	10	20	30	40	50
<b>PSE-IR-ML</b>	0,07	3,06	83,42	Pas résolu	

### **3.7 Conclusions**

Nous nous sommes intéressés à la planification des réapprovisionnements des systèmes d'assemblage à deux niveaux quand les délais d'approvisionnement des composants sont aléatoires.

Le critère considéré est la somme de l'espérance mathématique du coût de stockage des composants, l'espérance mathématique du coût de rupture en produit fini et l'espérance mathématique du coût de stockage du produit fini. Nous avons ainsi une fonction non linéaire à variables entières à optimiser.

Nous avons développé un algorithme d'optimisation basé sur la technique de séparation et d'évaluation (PSE). Une borne inférieure et une technique de réduction de l'espace de recherche ont été proposées.

Les tests ont montré l'efficacité de la PSE et des techniques proposées (IR et ML) pour résoudre des problèmes de petites tailles et de tailles moyennes avec un temps de calcul ne dépassant pas une heure.

Dans le chapitre suivant, nous proposerons un algorithme génétique permettant le traitement de problèmes de taille plus importante tout en assurant un bon compromis entre la qualité des solutions approchées proposées et le temps de calcul.

## **Chapitre 4 : Optimisation d'un système d'assemblage à deux niveaux par un Algorithme Génétique**

### **4.1 Introduction**

Après avoir présenté une PSE qui permet d'optimiser, de manière exacte, un système d'assemblage à deux niveaux, nous proposons une méthode approchée à base d'un algorithme génétique (AG). L'objectif est de résoudre des problèmes de taille plus importante en garantissant un bon compromis entre la qualité des solutions obtenues et le temps de calcul.

Divers méta-heuristiques sont proposées dans la littérature afin de résoudre des problèmes d'optimisation. Les AGs semblent être les plus adaptés à notre problème. En effet, la représentation des solutions et les opérateurs de reproduction (croisement et mutation) peuvent facilement être mis en place pour le problème considéré. En outre, dans la mesure où il n'existe pas de contraintes particulières, une méta-heuristique basée sur une recherche locale, telle que la recherche Tabou par exemple, demanderait l'exploration d'un grand nombre de voisins et donc un temps de calcul significatif.

La première description des algorithmes génétiques a été introduite par [Holland, 1975]. Puis [Goldberg and Deb, 1991] les ont utilisées pour résoudre un certain nombre de problèmes d'optimisation. Les AGs ont été appliqués avec succès à plusieurs problèmes proches tels que le problème de gestion de stocks dans un système d'assemblage à deux niveaux face aux aléas des délais d'approvisionnement ([Hnaïen et al., 2010]), le contrôle du temps d'approvisionnement dans un système d'assemblage à opérations multiples ([Perkgoz et al., 2007]), et la gestion de lotissements et des délais d'approvisionnement par ([Kianfar and Mokhtari, 2009]).

Le travail de ce chapitre se base essentiellement sur les travaux de [Hnaïen et al., 2009] et [Fallah-Jamshidi et al., 2011] sur les systèmes d'assemblage à deux niveaux. Afin de garantir un bon rapport entre la qualité des solutions et le temps de calcul, nous avons renforcé l'AG par une technique de réduction de l'espace de recherche initial, par une

procédure de recherche locale et par une procédure de perturbation. La description générale de l'algorithme ainsi que les techniques associées sont présentées dans les sections suivantes. Puis, quelques résultats expérimentaux sont présentés afin d'illustrer les performances de la méthode face à différents problèmes.

## 4.2 Problème à résoudre

Dans cette partie, nous étudions le même système d'assemblage à deux niveaux que celui présenté dans le chapitre précédent. Le coût à minimiser est l'espérance mathématique du coût total composé du coût de stockage des composants, coût de rupture en produit fini et le coût de stockage du produit fini. Nous conservons les notations et les définitions déjà décrites dans le chapitre précédent. Le paramétrage de l'AG nécessite d'introduire de nouvelles notations, elles seront définies au fur et à mesure qu'elles apparaissent dans le chapitre.

Comme dans le chapitre précédent, l'objectif est de déterminer l'ensemble optimal  $X = (X_{1,2}, \dots, X_{k,2}, \dots, X_{N_2,2})$  des dates de lancement des ordres aux fournisseurs qui minimisent l'espérance mathématique du coût total  $EC[C(X, L)]$  :

$$\begin{aligned}
\min(E[C(X, L)]) = & H \times \left( \sum_{s \geq T} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{o_1+o_2=s} \left[ P[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(X_{k,2} + o_2) \right] \right) \right) \\
& + R \times \left( T - \sum_{s \geq 0} \left( \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{o_1+o_2=s} \left[ P[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(X_{k,2} - o_2 - 1) \right] \right) \right) \\
& - \sum_{i=1}^{N_1} H_i \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \left[ \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(X_{k,2} + s) - \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(X_{k,2} - s - 1) \right] \right) \\
& - \sum_{l=1}^2 \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E[L_{i,l}] \right) - \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} E[X_{i,2}]
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Où :

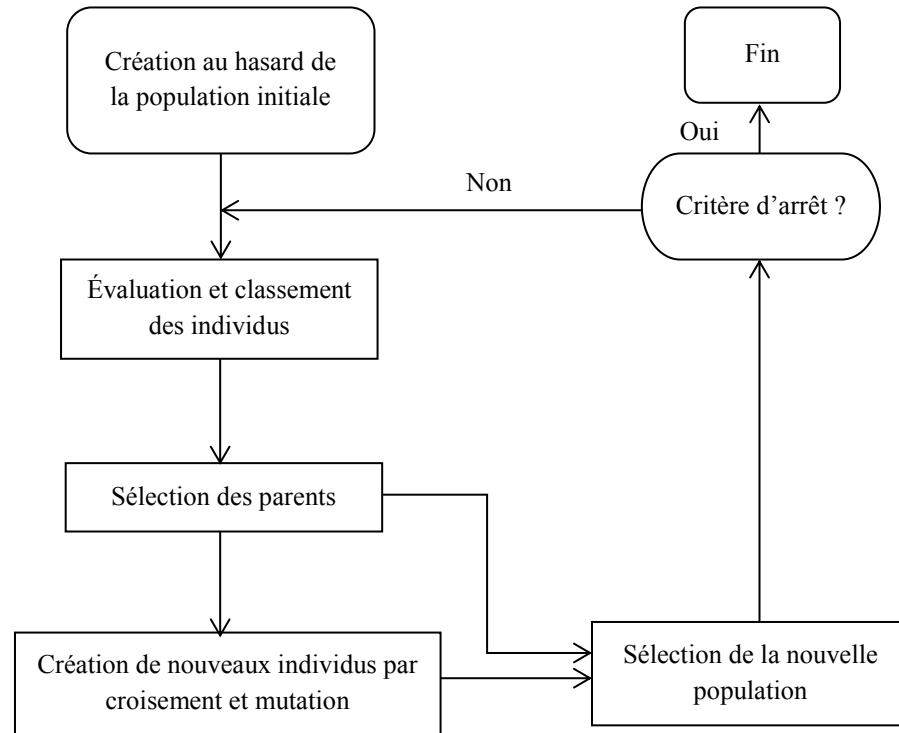
- $X = (X_{1,2}, \dots, X_{k,2}, \dots, X_{N_2,2}), \forall c_{k,2} \in S_{i,1}, \forall k = 1, \dots, N_2, \forall i = 1, \dots, N_1$
- $T - U_{k,2} \leq X_{k,2} \leq T - 2$
- $H_i = h_{i,1} - \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2}$
- $H = \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} + b$
- $R = r + \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1}$

Le problème étudié consiste à minimiser une fonction objectif (équation (4.1)) non linéaire à variables de décisions entières. La fonction objectif est calculée en un temps polynomial en  $O(N_2 \times U)$  avec  $U = \max(U_{k,2}), \forall k = 1, \dots, N_2$ . Mais la question de savoir si le problème est lui-même solvable en un temps polynomial ou s'il est *NP – difficile* est ouverte ([Hnaïen, 2008]).

### 4.3 Algorithme génétique

Un AG est basé sur le mécanisme de la sélection naturelle et de la génétique de l'évolution. Il commence par la création d'une population initiale qui représente l'ensemble des solutions de départ. Une fonction d'évaluation basée sur un critère de performance est appelée afin de déterminer la qualité (fitness) des solutions de la population. Les individus, jugés les plus forts par cette fonction, seront gardés pour se reproduire et auront plus de chance d'avoir des descendants que les autres.

La **Figure 4.1** présente un schéma général de fonctionnement d'un AG. Les différentes étapes de ce dernier seront présentées, en détail, dans les sections suivantes.



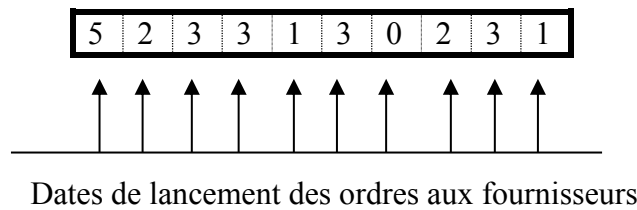
**Figure 4.1 :** Fonctionnement fondamental de l’algorithme génétique

Nous notons que chaque chromosome (ou individu, solutions, tous ces noms sont synonymes dans ce contexte) est constitué d'un ensemble d'éléments appelés gènes. Le but est de trouver la combinaison optimale de ces éléments qui donne la meilleure « fitness ». A chaque génération, les phases de sélection et de recombinaison (croisement et mutation) permettent de générer une nouvelle population d'individus à partir de la population courante. De génération en génération, la force des individus augmente et un test d'arrêt est effectué pour décider quand arrêter l'algorithme.

Nous présentons par la suite le codage de chaque individu, la technique de génération de la population initiale, la fonction fitness, la stratégie de sélection des individus candidats à la mutation et au croisement, les opérations de reproduction (mutation et croisement) et la technique de perturbation utilisée. Enfin, nous décrivons la procédure de recherche locale et la technique de perturbation.

### 4.3.1 Codage

Le premier pas dans l'implantation d'un AG est de créer la population initiale d'individus. Chaque individu de la population est codé par un chromosome. Il représente un point dans l'espace de recherche. Chaque solution possible au problème doit être codée à l'aide d'un chromosome. Dans notre étude, chaque gène est donc une date de lancement d'ordre d'approvisionnement à un fournisseur, et chaque chromosome est codé par un ensemble de dates de lancement des composants du dernier niveau.



**Figure 4.2 :** Exemple d'un chromosome à 10 gènes

La longueur du chromosome est égale à  $N_2$  qui correspond au nombre de composants au deuxième niveau du système d'assemblage étudié. La **Figure 4.2** présente un exemple de chromosomes à dix gènes ( $N_2 = 10$ ) du système d'assemblage présenté dans la **Figure 3.13**.

### 4.3.2 Génération de la population initiale

Le choix de la population initiale conditionne fortement la rapidité de convergence de l'algorithme. La position de l'optimum dans notre espace de recherche est totalement inconnue. Le problème principal est le choix de la taille et l'homogénéité de la population initiale. Si la taille de la population est très grande, le temps de calcul augmente et nécessite un espace mémoire important. Dans le cas contraire, l'algorithme risque de ne pas avoir assez de variété dans la population. Il faut donc trouver le bon compromis pour générer des individus bien répartis dans l'espace de recherche, qui servira de base pour les générations futures.



Dans un premier temps, nous générons ces individus d'une manière aléatoire selon une distribution uniforme comme suit:  $X_{i,2} = rand(2, U_{i,2})$  pour  $i \in [1, 2, \dots, N_2]$ .

Puis nous utilisons une technique de Génération Spécifique de la Population Initiale (GSPI) qui vise à réduire l'espace de recherche. En appliquant cette technique, la population initiale est composée de:

- 5% d'optima locaux obtenus en appliquant une procédure de recherche locale sur des individus générés d'une manière aléatoire selon une distribution uniforme.
- 95% de meilleurs voisins d'individus générés d'une manière aléatoire selon une distribution uniforme.

Dans la partie qui suit, nous présentons la fonction fitness qui permet d'évaluer les individus et d'éliminer les doublons et les remplacer par d'autres individus.

#### **4.3.3 Évaluation : fitness**

A chaque solution, nous associons une fonction d'évaluation appelée une fonction "fitness" reliée à la valeur de la fonction «objectif». Cette fonction de performance décrit le mérite de l'individu représenté par des données contenues dans un chromosome. Dans notre cas, la valeur numérique attribuée à un individu  $X$  est le coût total moyen  $E[C(X, L)]$  (voir l'équation (4.1)).

A chaque génération, une sélection d'individus est faite pour la reproduction par les opérateurs de croisement et de mutation. Chaque chromosome est évalué en utilisant la fonction fitness, celui qui aura une mauvaise valeur de la fonction "fitness", aura une probabilité forte d'être éliminé par le processus de sélection.

#### **4.3.4 Stratégie de sélection**

Après la création et l'évaluation de la population initiale, certains individus sont sélectionnés pour participer à la création de la nouvelle génération. Nous optons pour la

méthode de sélection élitiste. Un individu est sélectionné selon sa performance. Dans notre cas, il existe deux phases de sélection :

- La sélection de reproduction: les  $N/2$ -individus les plus performants dans la population sont choisis pour subir les opérations de reproduction (croisement et mutation). La sélection est  $N/2$ -élitiste.
- La sélection de remplacement est la sélection de la nouvelle population (de taille  $N$ ) d'une génération à une autre. Les individus de la nouvelle population sont sélectionnés parmi une population totale  $Pop_{totale}$  constituée de la population initiale ( $N$ ), des fils obtenus par croisement ( $Fils_{croisés}$ ) et par mutation ( $Fils_{mutés}$ ).

Il est à noter que les individus doublons sont supprimés dans l'AG pur. Pour maintenir une diversité suffisante de la population, ces doublons sont remplacés par des individus de la  $Pop_{totale}$ , qui ne font pas partie de la sélection de remplacement.

#### 4.3.5 Croisement

Dans les AGs, le croisement est considéré comme le principal opérateur pour produire de nouveaux individus et favoriser la diversification de la population. Un opérateur de croisement peut former deux nouveaux individus (fils) à partir de deux individus (parents). La création d'un couple d'enfants à partir d'un couple de parents est effectuée avec une probabilité de croisement  $P_{cross}$ , l'idée principale est d'échanger les gènes des parents afin de donner des enfants qui portent des propriétés combinées.

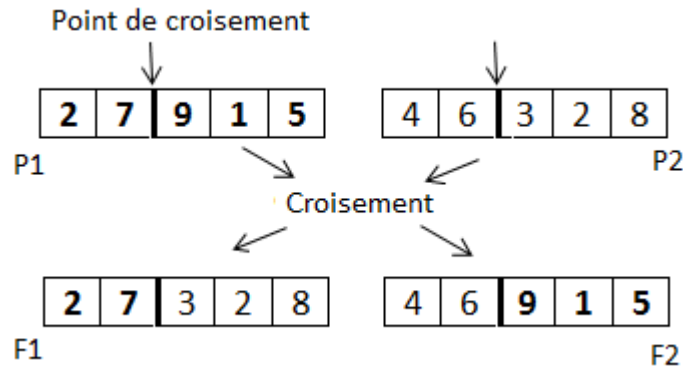
Parmi ces processus, nous pouvons citer le croisement multipoints. Un parent est composé de  $N_2$  gènes, donc il est possible de le couper en  $n$  ( $n = 1, \dots, N_2 - 1$ ). Nous choisissons un opérateur de croisement à un seul point. L'ensemble des  $N/2$  parents sélectionnés est partitionné de manière aléatoire en  $N/4$  couples. Le point de croisement est aussi choisi de manière aléatoire à chaque génération de l'algorithme dans l'intervalle  $[1, \dots, N_2 - 1]$ .

Chaque couple subit une opération de croisement avec une probabilité de croisement  $P_{cross}$ . Les couples qui ne subissent pas une opération de croisement ne sont pas maintenus.

Soit un couple de parents  $X^{p1} = (X_{1,2}^{p1}, \dots, X_{i,2}^{p1}, \dots, X_{N_2,2}^{p1})$  et  $X^{p2} = (X_{1,2}^{p2}, \dots, X_{i,2}^{p2}, \dots, X_{N_2,2}^{p2})$  qui subit un croisement à un point  $j$  avec  $j \in [1, \dots, N_2 - 1]$ . Les deux fils  $X^{f1} = (X_{1,2}^{f1}, \dots, X_{i,2}^{f1}, \dots, X_{N_2,2}^{f1})$  et  $X^{f2} = (X_{1,2}^{f2}, \dots, X_{i,2}^{f2}, \dots, X_{N_2,2}^{f2})$  sont obtenus de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_{i2}^{fk} = X_{i2}^{pk}, i \in [1, 2, \dots, j] \text{ et } k \in \{1, 2\} \\ X_{i2}^{f1} = X_{i2}^{p2}, i \in [j + 1, \dots, N_2] \\ X_{i2}^{f2} = X_{i2}^{p1}, i \in [j + 1, \dots, N_2] \end{cases}$$

Dans la **Figure 4.3**, un exemple d'opérateur de croisement, où  $N_2$  la taille du chromosome est égale à 5 et le croisement au point 2 est présenté :



**Figure 4.3** : Exemple de croisement d'un couple de parents.

#### 4.3.6 Mutation

L'opérateur de mutation apporte à l'AG une diversification nécessaire pour une exploration efficace de l'espace de recherche. Il permet d'atteindre la plupart des sous-espaces de

solutions réalisables. En effet, la mutation joue le rôle d'un bruit et empêche l'évolution de se figer. Les propriétés de convergence d'un AG sont fortement dépendantes de l'opérateur de mutation. Cet opérateur est utilisé avec une probabilité de mutation  $P_{mut}$ , généralement choisie faible (5%).

Dans notre étude, un individu  $X = (X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2,2})$  a une probabilité  $P_{mut}$  d'être muté. La mutation concerne uniquement un gène  $X_{i,2}$  du chromosome. Ce gène est sélectionné aléatoirement à chaque génération par une simple distribution uniforme:

$$\begin{cases} X_{i,2}^{New} = X_{i,2}^{Old} + rand(-2,2) \\ X_{j,2}^{New} = X_{j,2}^{Old}, \forall j \in [1, \dots, N_2], j \neq i \end{cases}$$

#### 4.3.7 Procédure de perturbation

Dans l'AG pur, lors de la création d'une nouvelle génération, les doublons sont remplacés par les meilleurs individus restant après la sélection de remplacement.

Il s'est avéré que cet algorithme de remplacement n'a pas été suffisamment efficace même s'il a permis de baisser le temps de calcul. En effet, après plusieurs générations, une diversité insuffisante de la population a été constatée et le nombre d'individus disponibles (sans les doublons) est presque égal au nombre d'individus nécessaires à la création de la nouvelle population.

Afin de créer une diversité suffisante de la population initiale de chaque génération, nous avons un deuxième algorithme où le remplacement des doublons est fait d'une manière aléatoire. Mais ce deuxième algorithme a un défaut, les individus insérés (dont la valeur de chaque gène est choisie d'une manière aléatoire telle que  $T - U_{k,2} \leq X_{k,2} \leq T - 2$ ) sont souvent de mauvaise qualité et sont presque tous supprimés dès la première sélection de la population initiale de la nouvelle génération.

Donc, finalement, nous avons opté pour la procédure de perturbation qui est décrite dans la **Figure 4.4**. Elle permet de sortir d'un optimum local et d'éviter une convergence prématurée.

Les deux limites  $h_1$  et  $h_2$  de cette partie à muter sont déterminées d'une manière aléatoire et dépendent de la nomenclature du produit fini et de la dépendance père-fils : Nous déterminons d'une manière aléatoire deux composants d'indices  $père_1$  et  $père_2$  du premier niveau de la nomenclature. Le bloc de gènes composé des dates d'ordres d'approvisionnement des composants du deuxième niveau qui sont nécessaires à l'assemblage des composants  $c_{père_1}, \dots, c_{père_2}$  subissent une mutation de  $\pm 1$ .

Déterminer la liste  $Indivs_{doublons}$  des individus doublons d'un individu  $i$  ;

**Pour** chaque doublon  $Indivs_{doublons}(i)$  **faire**

$père_1 \leftarrow rand(1, N_1)$ ;

$père_2 \leftarrow rand(père_1, N_1)$ ;

$h_1 \leftarrow premier_{fils}(père_1); h_2 \leftarrow dernier_{fils}(père_2)$ ;

$\varphi \leftarrow rand(-1 \text{ ou } 1)$  ;

**Pour**  $j = h_1$  à  $h_2$  **faire**

$Indiv_{doublon}(j) \leftarrow Indiv_{doublon}(j) + \varphi$  ;

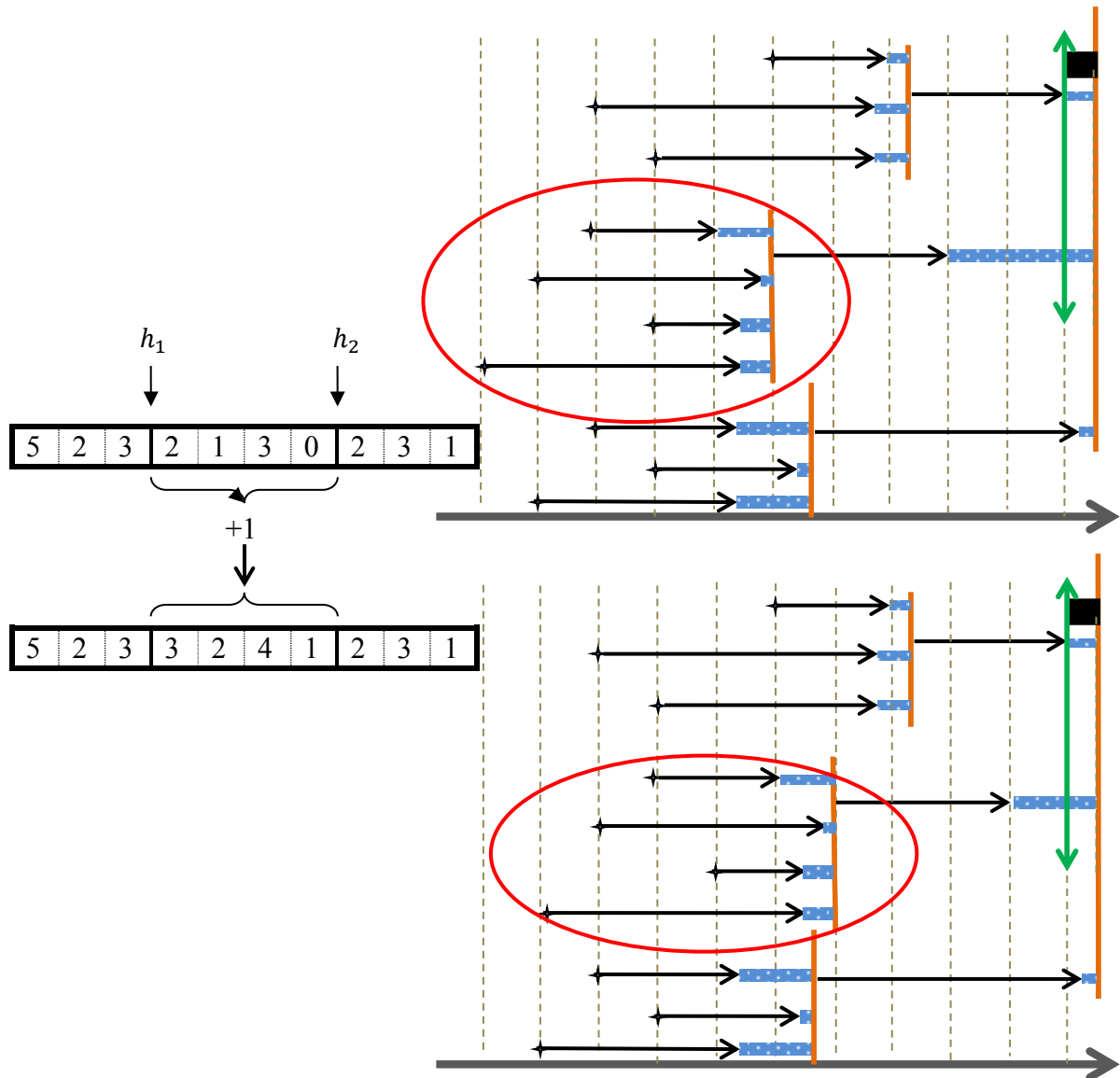
**Fin Pour**

**Fin Pour**

**Figure 4.4** : Procédure proposée pour créer une perturbation.

Cette procédure est un mix des deux méthodes de remplacement mentionnées ci-dessus. Les doublons sont supprimés et remplacés par des individus déterminés d'une manière aléatoire de l'espace de recherche réduit. Si la fonction objectif ne peut pas sortir d'un optimum local pendant 10 générations, au lieu de supprimer l'ensemble d'individus doublons, chaque individu de cet ensemble subit une mutation sur une partie de ces gènes

(c'est ce que nous appelons une mutation par bloc dans l'exemple de la **Figure 4.5** où les valeurs comprises entre  $h_1$  et  $h_2$  subissent une mutation de +1).



**Figure 4.5 :** Exemple illustrant la mutation par bloc.

#### 4.3.8 Recherche locale

La mutation, le croisement et la perturbation ne sont souvent pas suffisants pour éviter une convergence prématurée, c'est pour cela qu'il est utile d'intégrer une recherche locale (Cheng et al. 1997, Dolgui et al. 2007, Hnaïen 2008).

Dans un premier temps, la recherche locale est intégrée dans la procédure qui crée la population initiale. La recherche du meilleur voisin a été considérée : l'heuristique commence par générer un individu, toutes les solutions voisines avec une variation d'une unité d'un gène sont explorées. Ainsi l'ensemble de voisins peut contenir au plus  $2 \times N_2$  solutions.

Nous précisons que 95% de la population initiale est constituée de meilleurs voisins à des solutions générées aléatoirement et qui ne sont pas forcément des optima locaux (car la recherche du meilleur voisin est appliquée une seule fois).

Pour le 5% restant de la population initiale, soit des optima locaux, la même procédure est de nouveau appliquée sur chaque meilleur voisin (elle prend fin quand le même individu a toujours la meilleure fitness que son voisin et cela signifie qu'il est un optimum local). Une vérification est faite pour avoir des optima locaux différents.

La recherche locale est également utilisée à chaque nouvelle génération. Elle est appliquée sur la meilleure solution qui n'est pas déjà un optimum local (c.à.d. qui n'est pas dans  $E_{OptimaLocaux}$ ). Ce choix a été fait car le temps de calcul nécessaire pour évaluer l'ensemble des voisins d'un individu est non négligeable.

La description détaillée de l'algorithme proposé est présentée dans la **Figure 4.6**. La fonction *meilleur\_sous\_ensemble* permet de sélectionner une nouvelle population qui est composée de meilleurs individus.

```

 $Pop_0 \leftarrow population_{initiale}(); E_{OptimaLocaux} \leftarrow \emptyset;$ 

Pour  $gen$  de 1 à  $Max\_génération$  faire

     $Pop_{gen} \leftarrow Pop_{gen-1};$ 

    // Sélection de reproduction//

     $E_{Parents} \leftarrow meilleur\_sous\_ensemble\left(Pop_{gen}, \frac{N}{2}\right);$ 

    // Opérateurs de reproduction//

     $Fils_{croisés} \leftarrow croisement(E_{Parents}, P_{cross});$ 

     $Fils_{mutés} \leftarrow mutation(E_{Parents}, P_{mut});$ 

    //Recherche locale//

     $Meilleur_{Solution} \leftarrow meilleur\_sous\_ensemble(E_{Parents} \cup Fils_{croisés} \cup Fils_{mutés} \setminus E_{OptimaLocaux}, 1);$ 

     $Solution_{RL} \leftarrow Meilleur_{voisin}(Meilleur_{Solution});$ 

    Si  $(Solution_{RL} = Meilleur_{Solution})$  alors

         $E_{OptimaLocaux} \leftarrow E_{OptimaLocaux} \cup Meilleur_{Solution};$ 

    Fin Si

    // Sélection de remplacement//

     $Pop_{gen} \leftarrow meilleur\_sous\_ensemble\left(E_{Parents} \cup Fils_{croisés} \cup Fils_{mutés} \cup E_{OptimaLocaux}, \frac{N}{2}\right);$ 

    // Perturbation//

    Si  $convergence_{prématurée}(Pop_{gen})$  alors  $Pop_{gen} \leftarrow perturbation(Pop_{gen})$  Fin Si

Fin Pour

```

**Figure 4.6 :** Structure générale de l'AG proposé.



#### 4.3.9 Critère d'arrêt

Nous arrêtons l'algorithme après  $n$  générations.

### 4.4 Étude expérimentale et résultats

Pour la partie qui suit, nous utilisons la bibliothèque d'instances utilisée dans [Hnaïen, 2008]. Pour comparer les différentes méthodes mises en œuvre, la mesure de performance utilisée est le coût total moyen obtenu avec la meilleure solution connue (trouvée par la PSE pour certaines instances ou sinon la meilleure solution trouvée par les différentes versions de l'AG).

Après des tests préliminaires, nous avons fixé la taille de la population initiale  $Pop_0$  à 60 individus, la probabilité de croisement à 95%, la probabilité de mutation à 5% et la condition d'arrêt *Max\_génération* est fixée à 1000 générations.

#### 4.4.1 Exemples numériques

Dans cette section nous montrons en détail le même exemple numérique que celui étudié dans la section 3.6.1. Pour cet exemple, nous avons trouvé les dates optimales en utilisant notre AG, renforcé par notre recherche locale, notre procédure de génération de la population initiale et notre procédure de perturbation. Les résultats numériques sont faits à partir de 100 tests sur le même jeu de données. L'AG converge vers la solution optimale après plus de 383 générations en moyenne. Le même AG, renforcé par notre technique de Génération Spécifique de la Population Initiale (GSPI), notre procédure de Perturbation (P) et notre Recherche Locale (RL) est plus efficace ; les dates optimales de lancement d'ordres aux fournisseurs ont été trouvées en 0,002 secondes et en moins de 15 générations en moyenne.

Nous définissons pour la suite:

- Le *gap* moyen entre la meilleure solution de la population initiale et la meilleure solution trouvée au bout de 1000 générations :  $gap = \frac{best_{sol_0} - best_{sol_{1000}}}{best_{sol_{1000}}} \times 100$

- Le  $gap^*$  moyen entre  $best_{sol_{1000}}$  c.-à-d. la meilleure solution trouvée au bout de 1000 générations et  $best_{sol^*}$ , c.-à-d. la meilleure solution connue (trouvée par la PSE jusqu'à 30 composants) :  $gap^* = \frac{best_{sol_{1000}} - best_{sol^*}}{best_{sol^*}} \times 100$

Pour le même jeu de données, le  $gap$  moyen n'est que de 3.4% et le  $gap^*$  moyen est nul. Ce qui prouve l'efficacité de l'AG et des techniques proposées.

#### 4.4.2 Comportement de l'AG

Rappelons que pour les instances de taille inférieures à 30, comme Meilleure Solution Connue (MSC), nous utilisons la solution optimale qui a été trouvée par la PSE. Pour les instances de taille supérieure à 30, la meilleure solution connue est celle trouvée par les différentes versions d'AG (AG renforcé par la technique de Génération Spécifique de la Population Initiale (GSPI), par la procédure de Perturbation (P) et par la Recherche Locale (RL)).

Les tableaux (4.1, 4.2, 4.3 et 4.3) et les figures (4.7, 4.8, 4.9 et 4.10) montrent l'influence de la technique de GSPI, de la procédure de perturbation et de la RL sur la convergence de l'AG. Dans chaque tableau :

- La première colonne donne le nombre de composants total au deuxième niveau de la nomenclature,
- La deuxième colonne présente le nombre moyen d'itération (générations) où la meilleure solution est trouvée,
- La troisième colonne présente le  $gap$  moyen,
- La quatrième colonne présente  $gap^*$  moyen,
- La cinquième colonne présente le temps de calcul moyen en seconde avant que la meilleure solution soit trouvée.

Les résultats de l'AG sans la technique de GSPI, ni la procédure de perturbation (P) ni RL sont présentés dans le **Tableau 4.1**. Tout d'abord, l'AG pur nécessite un grand nombre de générations (plus de 800 générations en moyenne pour toutes les instances) et du temps de calcul avant qu'il converge vers la meilleure solution trouvée ( $best_{sol_{1000}}$ ).

**Tableau 4.1** : Algorithme génétique pur sans la Génération Spécifique de la Population Initiale ni procédure de Perturbation ni Recherche Locale

Famille d'instances	Itération	<i>gap</i> moyen (%)	<i>gap</i> * moyen de la MSC (%)	CPU Time (sec)
10	383,377	60,99	0,19	0,077
20	790,803	109,34	10,19	0,517
30	826,203	86,90	40,18	1,068
40	830,541	51,99	62,85	0,806
50	844,415	59,34	34,21	1,066
60	861,310	58,36	95,89	1,610
70	868,987	75,55	118,86	2,139
80	851,819	46,08	57,46	2,686
90	884,392	42,67	72,63	3,373
100	837,873	38,78	77,71	4,763

La population initiale semble être de mauvaise qualité, ce qui explique que l'AG apporte une amélioration de 63% en moyenne pendant 1000 générations (un *gap* moyen pour toutes les instances est de 63%). Or cette amélioration observée n'est pas suffisante pour que l'algorithme converge vers la meilleure solution connue (un *gap*\* moyen de la MSC est de 57,02% en moyenne pour toutes les instances).

Le **Tableau 4.2** montre l'efficacité d'un AG renforcé par une RL et une procédure de perturbation. En partant d'une population de mauvaise qualité (*gap* moyen est de 140,02% en moyenne pour toutes les instances), la solution moyenne trouvée par l'AG était à 0,02% en moyenne de la meilleure solution connue (un *gap*\* moyen de la MSC de 0,02% en moyenne pour toutes les instances).

L'AG, renforcé seulement par la technique de GSPI, améliore légèrement la qualité de la solution trouvée. L'algorithme converge plus vite vers la  $best_{sol_{1000}}$  qu'un AG pur (un nombre d'itérations moyen de 406,103 au lieu de 797,972 pour un AG pur) et la meilleure solution de la population initiale n'est qu'à 9.16% en moyenne de la meilleure solution

trouvée par l'algorithme. Néanmoins, le  $gap^*$  moyen reste assez élevé (16,65% en moyenne).

**Tableau 4.2 :** Algorithme génétique renforcé par une procédure de perturbation et une Recherche Locale

Famille d'instances	Itération	$gap$ moyen (%)	$gap^*$ moyen de la MSC (%)	CPU Time (sec)
10	36,016	59,67	0,00	0,010
20	91,007	133,49	0,00	0,083
30	144,038	161,19	0,00	0,243
40	225,257	147,25	0,01	0,264
50	530,231	112,87	0,23	0,776
60	363,227	170,19	0,01	0,861
70	417,974	196,10	0,01	1,307
80	675,254	141,42	0,16	2,399
90	709,28	140,65	0,10	3,293
100	754,048	144,13	0,28	4,501

**Tableau 4.3 :** Algorithme génétique renforcé par une technique de Génération Spécifique de la Population Initiale

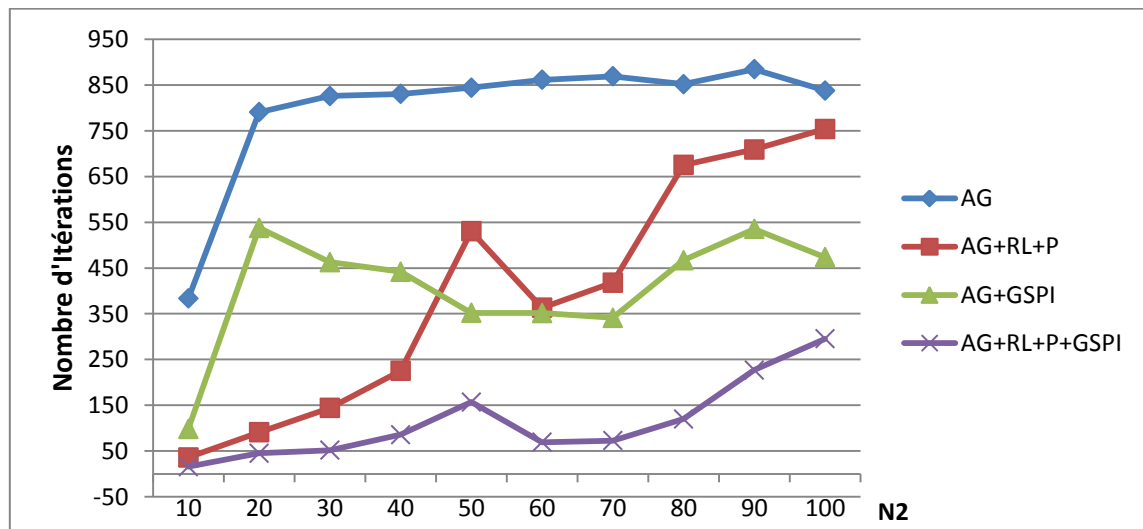
Famille d'instances	Itération	$gap$ moyen (%)	$gap^*$ moyen de la MSC (%)	CPU Time (sec)
10	98,096	1,89	0,00	0,008
20	537,632	15,74	1,87	0,141
30	462,932	15,78	4,44	0,238
40	441,831	8,35	10,15	0,987
50	352,059	5,30	8,40	1,057
60	351,624	6,97	52,31	0,593
70	340,999	8,03	63,54	0,831
80	466,987	10,45	10,60	1,415
90	535,24	10,25	6,54	2,269
100	473,633	8,84	8,60	2,184

Finalement, la plupart des meilleures solutions connues sont obtenues en renforçant l'AG par une technique de GSPI, une RL et une procédure de perturbation (**Tableau 4.4**). Cela nécessite en moyenne 113,804 générations avant de trouver la  $best_{sol_{1000}}$  et le  $gap^*$  total moyen de la meilleure solution connue est alors inférieur à 0,02%.

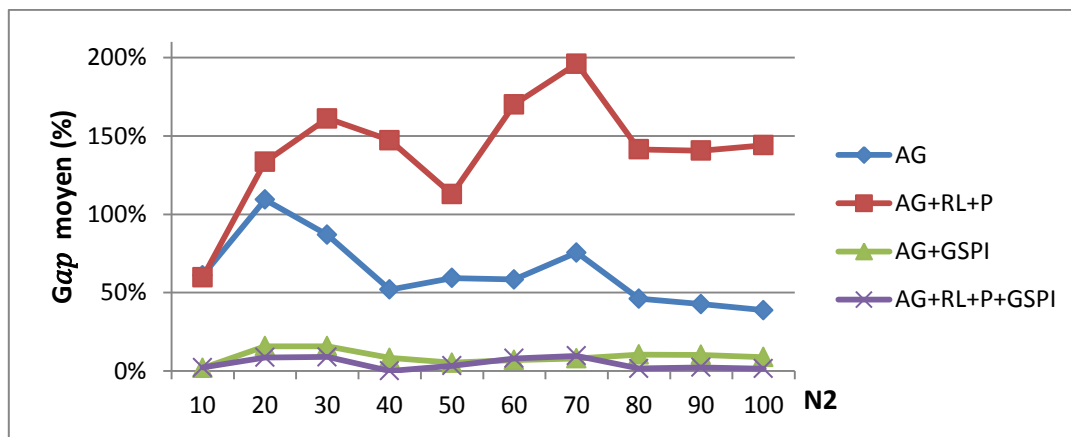
**Tableau 4.4 :** Algorithme génétique renforcé par une procédure de perturbation, une technique de Génération Spécifique de la Population Initiale et une Recherche Locale

Famille d'instances	Itération	<i>gap</i> moyen (%)	<i>gap</i> * moyen de la MSC (%)	CPU Time (sec)
10	15,436	2,20	0,00	0,002
20	45,05	8,59	0,00	0,015
30	51,567	8,89	0,00	0,042
40	85,584	0,09	0,00	0,255
50	156,958	3,31	0,08	0,050
60	68,979	8,05	0,00	0,157
70	72,504	9,61	0,00	0,231
80	119,782	1,58	0,08	0,500
90	226,911	2,25	0,01	1,060
100	295,269	1,50	0,01	1,321

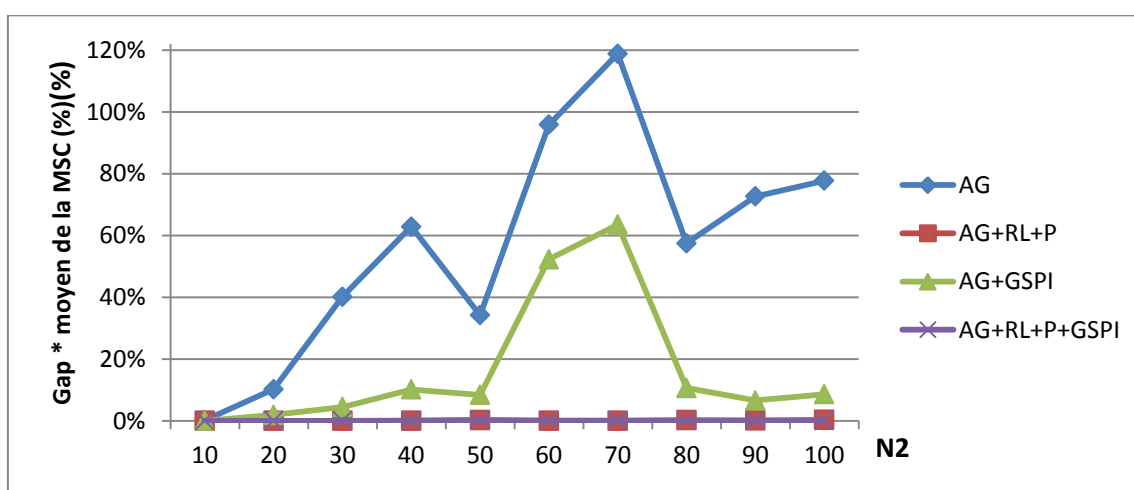
Les figures (4.7, 4.8, 4.9 et 4.10) comparent les différentes méthodes présentées en fonction du nombre de générations nécessaires pour trouver la meilleure solution, le *gap* moyen, *gap*\* moyen et le temps de calcul moyen en seconde avant que la meilleure solution soit trouvée.



**Figure 4.7 :** Comparaison du nombre d'itérations moyens obtenus par les différentes méthodes

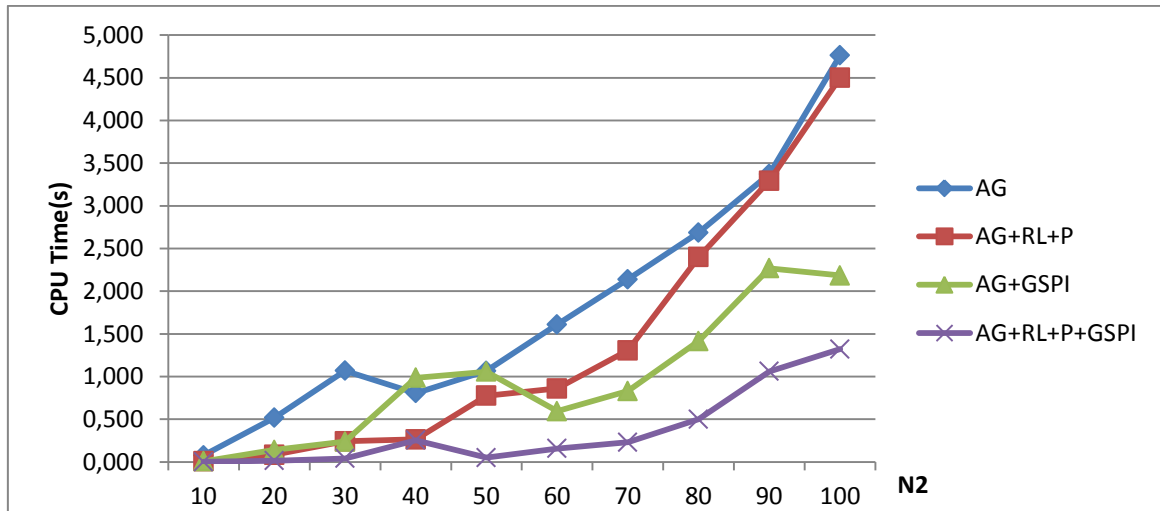


**Figure 4.8 :** Comparaison des *gap* moyens obtenus par les différentes méthodes



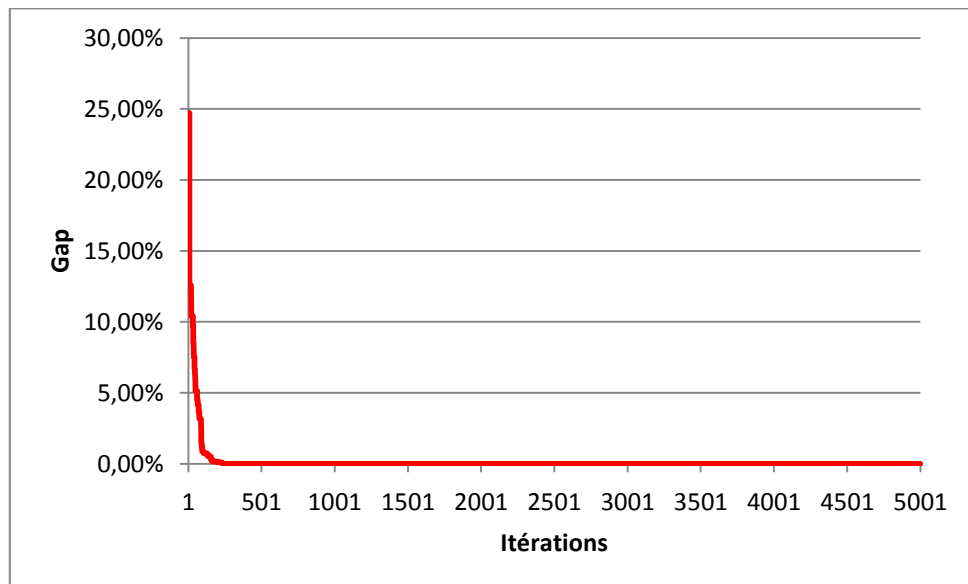
**Figure 4.9 :** Comparaison des *gap\** moyens obtenus par les différentes méthodes

Dans la **Figure 4.11**, nous présentons l'évolution du *gap* entre la meilleure solution de chaque itération et la meilleure solution trouvée par l'AG renforcé par les différentes techniques  $\left(gap = \frac{best_{sol_{gen}} - best_{sol_{5000}}}{best_{sol_{5000}}} \times 100\right)$ .



**Figure 4.10 :** Comparaison du temps de calcul moyen avant que la meilleure solution soit trouvée

Après la première itération, le *gap* est de 24,70% et à l'itération 96, il est réduit à 0,87%. A l'itération 241, le *gap* est finalement nul. Nous remarquons que 99,45% de l'amélioration a été faite durant les 173 premières itérations.



**Figure 4.11 :** Évolution du *gap* à partir de la meilleure solution connue

Ces différents résultats prouvent l'efficacité de l'AG renforcé par une technique de GSPI, une procédure de perturbation et une RL. L'AG pur reste simple et facile à mettre en œuvre ; cependant il semble être inefficace pour résoudre ce problème. Il converge lentement vers une solution de mauvaise qualité. Le renforcement de l'algorithme par une technique de GSPI a permis de répartir la population initiale sur un domaine de recherche réduit, néanmoins, l'AG reste souvent bloquer dans un optimum local. Quant à la perturbation et la RL, elles renforcent les opérations de croisement et de mutation, et assurent une convergence (lente) vers une solution de bonne qualité. L'utilisation de différentes techniques à la fois a assuré une convergence plus rapide vers une bonne solution.

#### **4.5 Conclusions**

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'optimisation des systèmes d'assemblage à deux niveaux quand les délais d'approvisionnement en composants sont incertains. Le critère considéré est la somme de l'espérance mathématique du coût de stockage des composants, l'espérance mathématique du coût de rupture en produit fini et l'espérance mathématique du coût de stockage du produit fini.

Un AG a été proposé pour déterminer les dates optimales de lancement d'ordres aux fournisseurs. Il a été renforcé par une technique de génération spécifique de la population initiale, une procédure de perturbation et une recherche locale. Un grand nombre d'instances a été utilisé afin de tester son efficacité. Une comparaison entre les différentes techniques a été faite (en termes de qualité de la meilleure solution, de la rapidité de la convergence et du temps de calcul avant que la meilleure solution soit trouvée).

Les tests ont montré les limites d'un AG pur. Cet algorithme part d'une population de mauvaise qualité, et les opérations de croisement et de mutation non renforcées par d'autres techniques entraînent une convergence lente vers une solution de mauvaise qualité. Le renforcement de l'AG par les différentes techniques a permis de résoudre des problèmes de grandes tailles avec un temps de calcul raisonnable.



Dans le chapitre suivant, nous étudions des systèmes d'assemblage multi-niveaux. Nous proposerons une modélisation analytique détaillée, une procédure optimale basée sur la PSE du troisième chapitre, ainsi qu'une approche heuristique basée sur l'AG proposé dans ce chapitre (renforcé par les différentes techniques).

## Chapitre 5 : Optimisation d'un système d'assemblage multi-niveaux

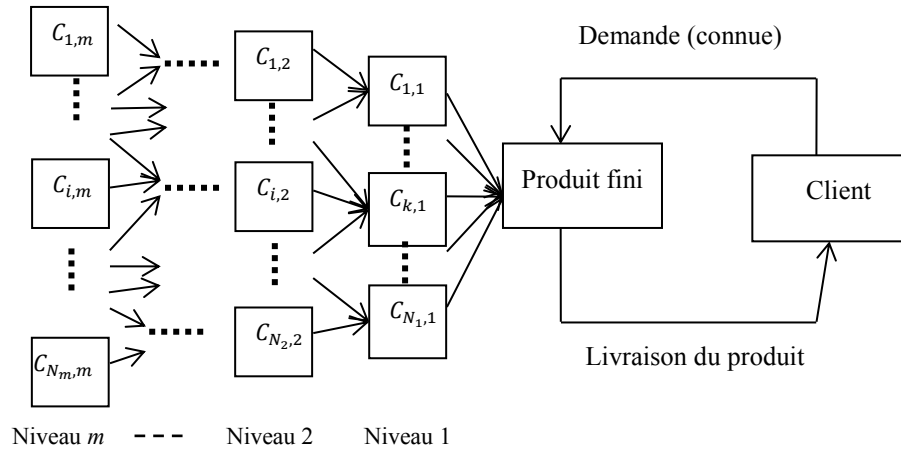
### 5.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents, nous avons présenté un modèle analytique permettant l'étude d'un système d'assemblage à deux niveaux. Une méthode exacte ainsi qu'une méthode approchée ont été développées pour l'optimiser.

Dans ce chapitre, nous proposons une généralisation du modèle analytique proposé dans le troisième chapitre ([Ben Ammar et al., 2013d]). Nous nous plaçons dans le cas d'une chaîne logistique à  $m$  niveaux, comme décrit dans la **Figure 5.1**. Chaque fournisseur de niveau  $l$  ( $l = 1, \dots, m$ ) livre les composants nécessaires aux fournisseurs de niveau  $l - 1$  avec un délai de livraison aléatoire. Les composants de niveau  $l$  sont alors assemblés pour fabriquer les composants de niveau  $l - 1$ , puis les composants du premier niveau sont livrés pour assembler le produit fini, le temps de cycle du dernier niveau est aussi aléatoire. Nous supposons que chaque composant de niveau  $l$  intervient dans le montage d'un unique composant de niveau  $l - 1$  (l'hypothèse de la nomenclature arborescente sans composants communs est donc prise). Le système étudié dans ce chapitre est une extension à  $m$  niveaux du système d'assemblage à deux niveaux étudié précédemment.

Dans les sections qui suivent, nous présenterons tout d'abord une description du problème. Nous détaillons ensuite le modèle analytique, permettant le calcul de l'espérance du coût total qui est égale à la somme du coût de stockage des composants ainsi que des coûts de rupture et de stockage du produit fini. Ensuite, comme dans le troisième chapitre, nous fournissons une technique de réduction de l'espace de recherche.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous travaillons sur le modèle proposé afin de trouver les dates optimales de lancement d'ordres aux fournisseurs. Une borne inférieure de la fonction « objectif » est prouvée. Par ailleurs, différentes techniques sont introduites afin de renforcer l'AG détaillé dans le chapitre précédent. Pour finir, quelques résultats expérimentaux sont présentés afin d'illustrer les performances des techniques et des méthodes sur un ensemble de tests.



**Figure 5.1** : Description de la nomenclature

## 5.2 Description du problème

Comme dans le chapitre précédent, nous étudions un seul type de produit fini. Rappelons les hypothèses : la demande est supposée connue ainsi que la date de livraison souhaitée par le client. Nous considérons le cas d'un problème mono-période. Le coût unitaire de stockage pour chaque type de composant ainsi que les coûts unitaires de stockage et de rupture en produit fini sont connus. Les délais d'approvisionnement pour les différentes commandes des composants sont indépendants. La probabilité de distribution des délais d'approvisionnement est discrète sur un intervalle connu, et leurs espérances maximales sont supposées finies.

Nous supposons aussi que la capacité d'assemblage pour tous les composants ainsi que pour le produit fini est infinie. Les délais d'approvisionnement pour un type de composant suivent toujours la même loi quelle que soit la quantité commandée, l'assemblage et la livraison se font en juste à temps.

Les notations suivantes sont utilisées (

**Tableau 5.1):**

**Tableau 5.1 : Notations**

*Paramètres*

$l$	Niveau dans la nomenclature, $l = 1, \dots, m$
$U_{i,m}$	Durée maximale entre la date de lancement d'un ordre à un fournisseur pour un composant $c_{i,m}$ et $T$ . Elle est égale à la valeur maximum de $\sum_{v=1}^m L_{i_v,v}$ ; notons que $\sum_{v=1}^m L_{i_v,v}$ varie dans $[2; \sum_{v=1}^m u_{i_v,v}]$ , $\forall \theta \in [1, m-1], c_{i_{\theta+1},l} \in S_{i_{\theta},l-1}$

*Variables*

$X_{i,m}$	<b>Variable de décision</b> : Date de lancement des composants de type $c_{i,m}$ (c.à-d. au dernier niveau), $X_{i,m} \in [T - U_{i,m}; T - m]$
-----------	---

*Fonctions*

$Q(.)$	Fonction récursive utilisée dans le calcul de la valeur de $E[.]$
--------	---

Ensuite, les notations suivantes sont introduites pour simplifier certaines expressions :

- La date d'assemblage d'un composant  $c_{i,l-1}$  :  $M_{i,l-1} = \max_{\substack{c_{k,l} \in S_{i,l-1} \\ l=2,\dots,m-1}} (M_{k,l} + L_{k,l})$
- La date d'assemblage d'un composant  $c_{i,m-1}$  :  $M_{i,m-1} = \max_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} (L_{k,m} + X_{k,m})$
- $\sum_{i=1}^{N_l} H_i = \sum_{i=1}^{N_l} \left( h_{i,l} - \sum_{c_{k,l+1} \in S_{i,l}} h_{k,l+1} \right)$

Nous présentons, dans la section qui suit, le détail des différents coûts.

### 5.3 Détermination des coûts

Comme dans les deux chapitres précédents, le cas concernant l'assemblage des composants au plus tôt est considéré. Nous détaillons ci-après les différents coûts (voir **Figure 5.2** pour le cas où le produit fini est assemblé après la date de livraison souhaitée par le client).



### Démonstration 5.1

Le coût total  $C(X, L)$  est composé de :

- $C_{sc_1}$  le coût de stockage des composants  $c_{i,1}$  : d'après l'expression (4.1), ce coût est égal à :

$$C_{sc_1} = \sum_{i=1}^{N_1} \left( h_{i,1} \left( M_{PF} - (M_{i,1} + L_{i,1}) \right) \right)$$

- $C_{sc_{2,\dots,m-1}}$  le coût de stockage des composants  $c_{i,l}$  dans les niveaux intermédiaires ( $l = 2, \dots, m-1$ ) : Il y a stockage des composants  $c_{i,l}$  pendant le temps s'écoulant entre la date de leur arrivée  $M_{k,l} + L_{k,l}$  et la date à laquelle tous les composants de niveau 1 sont présents  $M_{i,l-1}$  :

$$C_{sc_{2,\dots,m-1}} = \sum_{l=2}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \left( \sum_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} h_{k,l} \left( M_{i,l-1} - (M_{k,l} + L_{k,l}) \right) \right) \right) \quad (5.2)$$

- $C_{sc_m}$  le coût de stockage des composants  $c_{i,m}$  : Il y a un stockage des composants de type  $c_{i,m}$  du dernier niveau de la nomenclature :

$$C_{sc_m} = \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \left( \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} \left( M_{i,m-1} - (L_{k,m} + X_{k,m}) \right) \right) \quad (5.3)$$

- $C_{bPF}$  le coût de rupture en produit fini, si le produit est livré en retard par rapport à la date de livraison souhaitée par le client, il est égal à  $b \times (M_{PF}^+ - T)$ .
- $C_{rPF}$  le coût de stockage du produit fini, si le produit est disponible avant la date de livraison prévue. Ce coût est égal à  $r \times (T - M_{PF}^-)$ .

Le coût total  $C(X, L)$  est égal à la somme de  $C_{sc_{2,\dots,m-1}}$ ,  $C_{sc_1}$ ,  $C_{sc_m}$ ,  $C_{bPF}$  et  $C_{rPF}$ :

$$\begin{aligned}
C(X, L) = & \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} M_{PF} - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} M_{i,1} - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} L_{i,1} + \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \sum_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} h_{k,l} M_{i,l-1} \\
& - \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \sum_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} h_{k,l} M_{k,l} - \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \sum_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} h_{k,l} L_{k,l} \\
& + \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} M_{i,m-1} - \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} L_{k,m} \\
& - \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} X_{k,m} + b \times (M_{PF}^+ - T) + r \times (T - M_{PF}^-)
\end{aligned}$$

Le coût total  $C(X, L)$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
C(X, L) = & \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} M_{PF} - \alpha(X, L) + \beta(X, L) - \gamma(L) - \delta(X) + b \times (M_{PF}^+ - T) + r \\
& \times (T - M_{PF}^-)
\end{aligned}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\bullet \alpha(X, L) = & \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \sum_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} h_{k,l} M_{k,l} + \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} M_{i,1} = \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} M_{i,l} + \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} M_{i,1} \\
= & \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} M_{i,l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \beta(X, L) &= \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \sum_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} h_{k,l} M_{i,l-1} + \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} M_{i,m-1} \\
&= \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{c_{k,l+1} \in S_{i,l}} h_{k,l+1} M_{i,l} \\
\bullet \gamma(L) &= \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \sum_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} h_{k,l} L_{k,l} + \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} L_{k,m} + \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} L_{i,1} \\
&= \sum_{l=2}^m \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \sum_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} h_{k,l} L_{k,l} + \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} L_{i,1} = \sum_{l=2}^m \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} L_{i,l} + \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} L_{i,1} \\
&= \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} L_{i,l} \\
\bullet \delta(X) &= \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} X_{k,m} = \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} X_{i,m}
\end{aligned}$$

Ce qui donne l'expression (5.1).

C.Q.F.D.

Les délais d'approvisionnement  $L_{i,l}$  sont des variables aléatoires. Le coût ci-dessus est donc une variable aléatoire. Notre objectif est de minimiser son espérance mathématique, c'est-à-dire le coût total moyen  $E[C(X, L)]$ .

**Proposition 5.2**

Le coût total moyen  $E[C(X, L)]$  s'exprime comme suit :

$$E[C(X, L)] = (r \times T) + H \times \left( \sum_{s \geq T} (1 - Q^+(L_{i,1}, s, 1)) \right) \quad (5.4)$$



$$\begin{aligned}
& -R \times \left( \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left( 1 - Q^+(L_{i,1}, s, 1) \right) \right) - \sum_{l=1}^{m-1} \left( H_l \sum_{s \geq 0} \left( 1 - Q^+(L_{i,l}, s, l) \right) \right) \\
& - \sum_{l=1}^m \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E \llbracket L_{i,l} \rrbracket \right) - \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} E \llbracket X_{i,m} \rrbracket
\end{aligned}$$

Avec  $Q(L_{i,\alpha}, s, \alpha)$  une fonction récursive qui permet l'expression de la dépendance entre les niveaux :

$$Q^+(L_{i,\alpha}, s, \alpha) = \begin{cases} \prod_{c_{k,\alpha+1} \in S_{i,\alpha}} \sum_{o_\alpha + w = s} P[L_{i,\alpha} = o_\alpha] \times Q^+(L_{k,\alpha+1}, w, \alpha + 1), & \alpha \neq m, \alpha \neq 1 \\ \prod_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} F_{k,m}(-X_{k,m} + w), & \alpha = m \\ \prod_{i=1, \dots, N_1} \sum_{o_1 + w = s} P[L_{i,1} = o_1] \times Q^+(L_{i,\alpha+1}, w, \alpha + 1), & \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour  $m = 2$ , après plusieurs simplifications, nous retrouvons l'expression (3.6) :

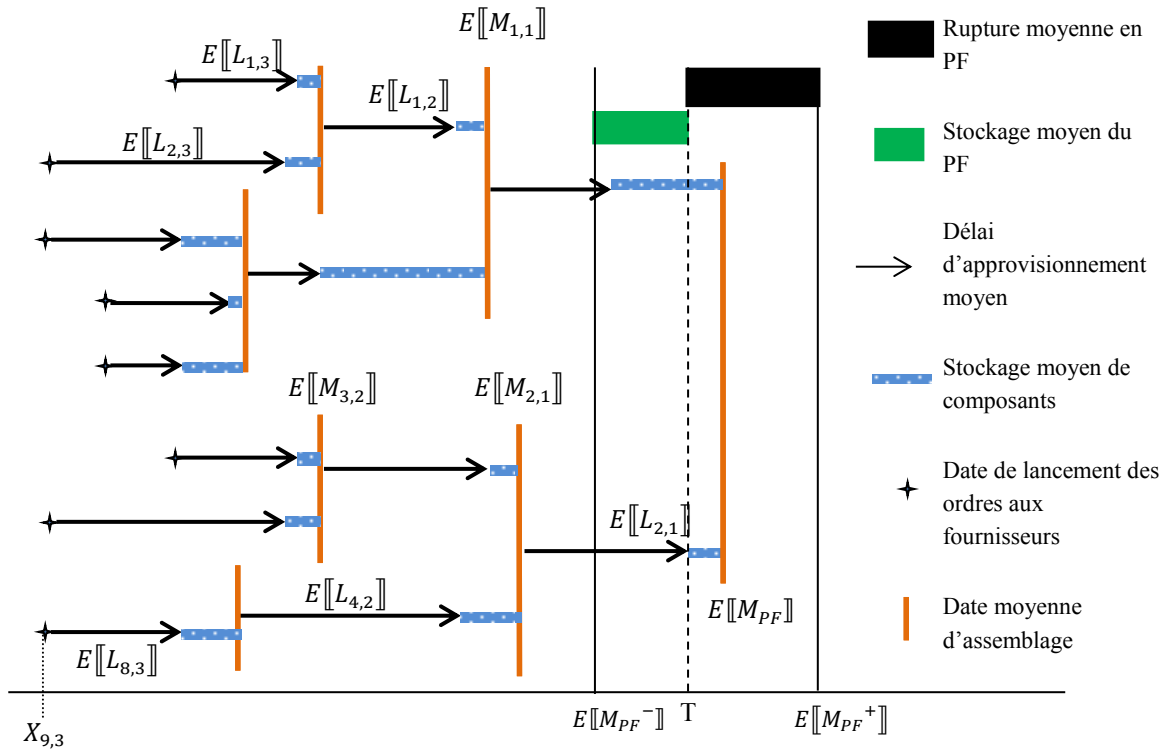
$$\begin{aligned}
E \llbracket C(X, L) \rrbracket &= (r \times T) + H \times \left( \sum_{s \geq T} \left( 1 - \prod_{i=1, \dots, N_1} \sum_{o_1 + w = s} P[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + w) \right) \right) - R \\
&\times \left( \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left( 1 - \prod_{i=1, \dots, N_1} \sum_{o_1 + w = s} P[L_{i,1} = o_1] \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + w) \right) \right) \\
&- H_i \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + w) \right) - \sum_{l=1}^2 \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E \llbracket L_{i,l} \rrbracket \right) - \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} E \llbracket X_{i,2} \rrbracket
\end{aligned}$$

### **Démonstration 5.2**

A partir de l'expression (5.1), nous déterminons l'expression mathématique initiale de l'espérance mathématique du coût total  $E \llbracket C(X, L) \rrbracket$ :

$$\begin{aligned}
E[C(X, L)] = & \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} E[M_{PF}] - \sum_{l=1}^{m-1} (H_l \times E[M_{i,l}]) - \sum_{l=1}^m \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E[L_{i,l}] \right) \\
& - \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} E[X_{i,m}] + b \times (E[M_{PF}^+] - T) + r \times (T - E[M_{PF}^-])
\end{aligned} \quad (5.5)$$

La **Figure 5.3** illustre la composition de l'espérance mathématique du coût total. La rupture moyenne en produit fini, le stockage moyen du produit fini et le stockage moyen des composants sont schématisés :



**Figure 5.3 :** Composition de l'espérance mathématique du coût total

Afin de déterminer l'expression exacte du coût total moyen  $E[C(X, L)]$ , nous avons besoin de calculer les  $E[M_{i,l}]$ ,  $E[M_{PF}^+]$ ,  $E[M_{PF}^-]$  et  $E[M_{PF}]$  (voir **Figure 5.3**).

D'après l'expression (3.9) :

$$E[M_{PF}^+] = T + \sum_{s \geq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s])$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} Pr[M_{PF} \leq s] &= Pr\left[\max_{i=1, \dots, N_1} (M_{i,1} + L_{i,1}) \leq s\right] \\ &= Pr[M_{1,1} + L_{1,1} \leq s, \dots, M_{i,1} + L_{i,1} \leq s, \dots, M_{N_1,1} + L_{N_1,1} \leq s] \end{aligned}$$

De plus,  $\forall i = 1, \dots, N_1$ , les variables aléatoires  $(M_{i,1} + L_{i,1})$  sont également indépendantes, alors :

$$\sum_{s \geq T} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) = \sum_{s \geq T} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \sum_{\substack{o_1 + w = s \\ o_1 + w \in \mathbb{Z}}} [Pr[L_{i,1} = o_1] \times Pr[M_{i,1} \leq w]] \right)$$

La probabilité que  $M_{i,1}$  soit inférieure ou égale à  $w$  est déterminée de la même façon :

$$Pr[M_{i,1} \leq w] = Pr[\max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (M_{k,2} + L_{k,2}) \leq w]$$

Soit  $n_{i,1}$  le nombre total de composants  $c_{k,2} \in S_{i,1}$  au 2<sup>ème</sup> niveau de la nomenclature qui sont nécessaires à l'assemblage du composant  $c_{i,1}$ . Donc :

$$Pr[M_{i,1} \leq w] = Pr[M_{1,2} + L_{1,2} \leq w, \dots, M_{k,2} + L_{k,2} \leq w, \dots, M_{n_{i,1},2} + L_{n_{i,1},2} \leq w]$$

Les variables aléatoires  $(M_{k,2} + L_{k,2})$  sont aussi indépendantes. Alors :

$$\begin{aligned}
Pr[M_{i,1} \leq w] &= \prod_{k=1}^{n_{i,1}} \sum_{\substack{o_2+w_1=w \\ o_2+w_1 \in \mathbf{Z}}} [Pr[L_{k,2} = o_2] \times Pr[M_{k,2} \leq w_1]] \\
&= \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} \sum_{\substack{o_2+w_1=w \\ o_2+w_1 \in \mathbf{Z}}} Pr[L_{k,2} = o_2] \times Pr[M_{k,2} \leq w_1]
\end{aligned}$$

La probabilité que  $M_{k,2}$  soit inférieure ou égale à  $w_1$  est calculée de la même façon que pour  $M_{i,1}$ .

$$Pr[M_{i,2} \leq w_1] = \prod_{c_{k,3} \in S_{i,2}} \sum_{\substack{o_2+w_2=w_1 \\ o_2+w_2 \in \mathbf{Z}}} Pr[L_{k,3} = o_3] \times Pr[M_{k,3} \leq w_2]$$

Pour ne pas créer de confusions concernant  $i$  et  $k$ , pour la partie qui suit, un composant de niveau 2 de la nomenclature sera noté  $c_{k,2}$  au lieu de  $c_{i,2}$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned}
Pr[M_{i,2} \leq w_1] &= Pr[M_{k,2} \leq w_1] \\
&= \prod_{c_{k,3} \in S_{k,2}} \sum_{\substack{o_2+w_2=w_1 \\ o_2+w_2 \in \mathbf{Z}}} Pr[L_{k,3} = o_3] \times Pr[M_{k,3} \leq w_2]
\end{aligned}$$

En la mettant dans l'expression de  $Pr[M_{i,1} \leq w]$ :

$$Pr[M_{i,1} \leq w] = \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} \left( \sum_{\substack{o_2+w_1=w \\ o_2+w_1 \in \mathbf{Z}}} \left( \times \prod_{c_{k,3} \in S_{k,2}} \sum_{\substack{o_2+w_2=w_1 \\ o_2+w_2 \in \mathbf{Z}}} Pr[L_{k,2} = o_2] Pr[L_{k,3} = o_3] \times Pr[M_{k,3} \leq w_2] \right) \right)$$

En introduisant la fonction récursive :

$$Q^+(L_{i,\alpha}, s, \alpha) = \begin{cases} \prod_{c_{k,\alpha+1} \in S_{i,\alpha}} \sum_{o_{\alpha+1}+w=s} P[L_{i,\alpha} = o_{\alpha}] \times Q^+(L_{k,\alpha+1}, w, \alpha+1), & \alpha \neq m, \alpha \neq 1 \\ \prod_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} F_{k,m}(-X_{k,m} + w), & \alpha = m \\ \prod_{i=1, \dots, N_1} \sum_{o_1+w=s} P[L_{i,1} = o_1] \times Q^+(L_{i,\alpha+1}, w, \alpha+1), & \alpha = 1 \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$Pr[M_{PF} \leq s] = Q^+(L_{i,1}, s, 1) \quad (5.6)$$

Et :

$$E[M_{PF}^+] = T + \sum_{s \geq T} (1 - Q^+(L_{i,1}, s, 1)) \quad (5.7)$$

Les expressions (3.10) et (5.6) sont utilisées pour calculer  $E[M_{PF}^-]$ :

$$\begin{aligned} E[M_{PF}^-] &= \sum_{0 \leq s \leq T-1} (1 - Pr[M_{PF} \leq s]) \\ E[M_{PF}^-] &= \sum_{0 \leq s \leq T-1} (1 - Q^+(L_{i,1}, s, 1)) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Les expressions (5.7) et (5.8) sont utilisées pour calculer l'espérance mathématique de la date d'assemblage du produit fini  $E[M_{PF}]$ . Nous notons que pour toute variable aléatoire  $A$ ,  $A = \max(A, T) + \min(A, T) - T$ . Nous déduisons par la suite que  $E[M_{PF}] = E[M_{PF}^+] + E[M_{PF}^-] - T$  et que:

$$E[M_{PF}] = \sum_{s \geq 0} (1 - Q^+(L_{i,1}, s, 1)) \quad (5.9)$$

Les  $M_{i,l}$  sont des variables aléatoires discrètes positives avec un nombre fini de valeurs possibles.

$$E[M_{i,l}] = \sum_{s \geq 0} (1 - Pr[M_{i,l} \leq s])$$

Sachant que :

$$\begin{aligned} Pr[M_{i,l} \leq s] &= Pr \left[ \max_{\substack{c_{k,l+1} \in S_{i,l} \\ l=1, \dots, m-2}} (M_{k,l+1} + L_{k,l+1}) \leq s \right] \\ &= Pr[M_{1,l+1} + L_{1,l+1} \leq s, \dots, M_{i,l+1} + L_{i,l+1} \leq s, \dots, M_{N_{l+1},l+1} + L_{N_{l+1},l+1} \leq s] \end{aligned}$$

De plus,  $\forall i = 1, \dots, N_{l+1}$  et  $\forall l = 1, \dots, m-2$ , les variables aléatoires  $(M_{k,l+1} + L_{k,l+1})$  sont également indépendantes, alors :

$$E[M_{i,l}] = \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{k,l+1} \in S_{i,l}} \sum_{\substack{o_1 + o_2 = s \\ o_1 + o_2 \in \mathbf{Z}}} [P[L_{k,l+1} = o_1] \times P[M_{k,l+1} \leq o_2]] \right)$$

La fonction récurrente  $Q^+(L_{i,l}, s, l)$  est appelée à chaque fois quand il faut de déterminer la probabilité liée à  $M_{k,l+1}$ . L'expression de  $E[M_{i,l}]$  peut être écrite comme suit:

$$E[M_{i,l}] = \sum_{s \geq 0} (1 - Q^+(L_{i,l}, s, l)) \quad (5.10)$$

Puis, en utilisant les expressions (5.5, 5.7, 5.8, 5.9 et 5.10), l'espérance mathématique du coût total peut être simplifiée :

$$\begin{aligned}
E[C(X, L)] &= r \times T + H \left( \sum_{s \geq T} (1 - Q^+(L_{i,1}, s, 1)) \right) - R \times \left( \sum_{0 \leq s \leq T-1} (1 - Q^+(L_{i,1}, s, 1)) \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^{m-1} \left( H_i \sum_{s \geq 0} (1 - Q^+(L_{i,l}, s, l)) \right) - \sum_{l=1}^m \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E[L_{i,l}] \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} E[X_{i,m}]
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

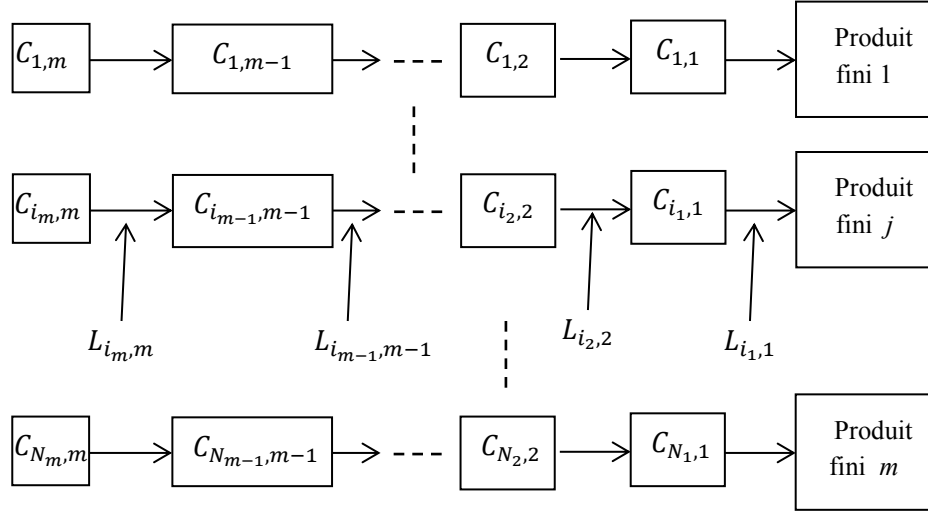
#### 5.4 Réduction de l'espace de recherche initiale

Comme dans le chapitre 3, nous proposons une technique de réduction de l'espace de recherche. Les intervalles des valeurs possibles de  $X_{k,m}$ , qui sont initialement définis sous la forme  $[T - U_{k,m}, T - m]$ , sont réduits.

Dans le chapitre 3, nous avons décomposé le système d'assemblage à deux niveaux en plusieurs chaînes linéaires. Par la suite nous nous sommes basés sur des quantiles des lois de distribution de la somme des délais d'approvisionnement de chaque chaîne linéaire  $L_{i,1} + L_{j,2}$ . Pour majorer les dates de lancement d'ordres d'approvisionnement des différents composants du deuxième niveau du système d'assemblage.

Nous utilisons ici le même principe pour réduire l'espace de recherche initial. Nous nous basons sur les travaux de [Hnaien et al., 2008] et [Hnaien, 2008] et sur le modèle Newsboy afin de déterminer, pour chaque chaîne linéaire, les dates optimales de lancement d'ordre aux fournisseurs qui minimisent la somme du (1) coût moyen de rupture en produit fini et (2) du coût de stockage moyen du produit fini.

Nous décomposons le système d'assemblage initial (voir l'exemple dans la **Figure 5.1**) en  $N_m$  chaînes linéaires (**Figure 5.4**). Notons  $\psi_j$  la date de disponibilité de produit fini de la chaîne linéaire  $j$  avec  $j \in \{1, \dots, N_m\}$ .



**Figure 5.4 :** Décomposition du système d'assemblage en plusieurs chaînes linéaires

Soient  $c_{i_m,m}$  un composant du dernier niveau de la chaîne linéaire dont le délai d'approvisionnement est égal à  $L_{i_m,m}$ . Ce composant est nécessaire à l'assemblage du composant  $c_{i_{m-1},m-1}$  (son délai d'approvisionnement est égal à  $L_{i_{m-1},m-1}$ ) ; lui-même composé du composant  $c_{i_{m-2},m-2}$ , etc.

La date de disponibilité du produit fini pour cette chaîne linéaire est égale à :

$$\psi_j = X_{i_m,m} + L \text{ avec } L = L_{i_1,1} + L_{i_2,2} + \dots + L_{i_{m-1},m-1} + L_{i_m,m}.$$

Pour chaque chaîne linéaire :

Soient  $\psi_j^+ = \max(\psi_j, T)$  et  $\psi_j^- = \min(\psi_j, T)$ . Le coût total  $C(X_j, L)$  est une variable aléatoire qui est égale à :

$$C(X_j, L) = b \times (\psi_j^+ - T) - r \times (T - \psi_j^-)$$

L'espérance de ce coût total  $E[C(X_j, L)]$  est égale à :

$$E[C(X_j, L)] = b \times (E[\psi_j^+] - T) - r \times (T - E[\psi_j^-])$$



Nous déduisons à partir des expressions (3.9) et (3.10) que :

$$E[\psi_j^+] = T + \sum_{s \geq T} (1 - Pr[\psi_j \leq s])$$

$$E[\psi_j^-] = \sum_{0 \leq s \leq T-1} (1 - Pr[\psi_j \leq s])$$

Ainsi le coût total moyen  $E[C(X_j, L)]$  peut être écrit comme suit :

$$E[C(X_j, L)] = b \times \left( \sum_{T \leq s \leq s_{sup}} (1 - Pr[\psi_j \leq s]) \right) + r \times \left( T - \sum_{0 \leq s \leq T-1} (1 - Pr[\psi_j \leq s]) \right) \quad (5.11)$$

Par la suite, nous posons  $F(X_j) = Pr[\psi_j \leq T]$ .

### **Proposition 5.3**

La solution optimale  $X_j^{**}$  qui minimise l'expression (5.11) est la suivante :

$$F(T - X_j^{**} - 1) \leq \frac{b}{b + r} \leq F(T - X_j^{**}) \quad (5.12)$$

### **Démonstration 5.3**

Nous introduisons la fonction suivante :

$$G(X_j^{**} - 1) = E[C(X_j^{**}, L)] - E[C(X_j^{**} - 1, L)]$$

La solution optimale  $X_j^{**}$  doit satisfaire :

$$\begin{cases} G(X_j^{**}) = b - [(b + r) \times F(T - X_j^{**})] \geq 0 \\ G(X_j^{**} - 1) = b - [(b + r) \times F(T - X_j^{**} - 1)] \leq 0 \end{cases}$$

Pour satisfaire l'expression (5.12).

Nous retrouvons ainsi les propositions présentées dans la section 3 de l'article [Hnaïen et al., 2008], sachant que dans notre cas, le coût de stockage  $h$  du composant du niveau 1 est remplacé par le coût de stockage  $r$  du produit fini ; et la date de livraison souhaitée par le client  $T$  est différente de 0.

### **Proposition 5.3**

*L'espace de recherche initial  $[T - U_{i,m}, T - m]$  peut-être réduit à  $[T - U_{i,m}, X_j^{**}]$ .*

### **Démonstration 5.3**

Comme dans la démonstration de la proposition (3.3) du chapitre 3, supposons qu'il existe un vecteur composé des dates de lancement d'ordres aux fournisseurs  $X^* = (X_{1,m}^*, \dots, X_{N_m,m}^*)$  pour lequel  $E[C(X^*, L)]$  est optimal (il n'est pas unique). Ce vecteur est défini,  $\forall (k, j) \in [1; N_m]^2$ , comme suit :

$$\begin{cases} X_{k,m}^* \in [T - U_{k,m}; X_j^{**}], & \forall c_{k,m} \in S_{i,m-1} \\ & k \neq j \\ X_{j,m}^* \in ]X_j^{**}; T - 2], & \forall c_{j,m} \in S_{i,m-1} \\ & j \neq k \end{cases}$$

C'est-à-dire que d'une part, il y a des dates de lancement d'ordres aux fournisseurs  $X_{k,m}^*$  qui sont comprises entre  $T - U_{k,m}$  et  $X_j^{**}$  ; et que d'autre part, il existe aussi des dates de lancement d'ordres aux fournisseurs  $X_{j,m}^*$  qui sont comprises entre  $X_j^{**} + 1$  et  $T - 2$ .

Nous démontrons par l'absurde qu'il existe  $A^* = (A_{1,m}^*, \dots, A_{k,m}^*, \dots, A_{N_m,m}^*)$  qui domine  $X^*$  tels que  $\forall c_{k,m} \in S_{k,m-1}, \forall \delta \in \mathbb{N}, A_{k,m}^* \in [T - U_{k,m}; X_j^{**}]$  et  $A_{k,m}^* = X_{k,m}^* - \delta$ . C'est-à-dire que toutes les dates de lancement d'ordre sont comprises entre  $T - U_{k,m}$  et  $X_j^{**} + 1$ .

Soit  $\varepsilon(A^*, X^*)$  la différence entre : (1) l'espérance mathématique du coût total associée au vecteur  $A^*$  et (2) l'espérance mathématique du coût total associée au vecteur  $X^*$  :

$$\varepsilon(X^*, A^*) = E[C(X^*, L)] - E[C(A^*, L)]$$

La démonstration de l'inégalité  $\varepsilon(A^*, X^*) \geq 0$  est présentée en annexe (Démonstration A.4).

## 5.5 Optimisation

### 5.1.1 Problème à résoudre

Notre problème peut donc se modéliser comme le problème d'optimisation suivant :

$\min(E[C(X, L)])$  sous la contrainte :

$$T - U_{i,m} \leq X_{i,m} \leq X_i^{**}$$

Nous nous trouvons alors face à une fonction non linéaire à variables entières. A partir d'un certain nombre de composants au dernier niveau de la nomenclature, l'énumération explicite de tout l'espace de recherche devient impossible. De ce fait, nous présentons ici une généralisation de la PSE proposée dans le troisième chapitre, ainsi qu'une borne inférieure de la fonction objectif ([Ben Ammar et al., 2013c]). Les différentes techniques permettant d'adapter l'AG présenté dans le chapitre 4 au cas multi-niveau sont également détaillées dans ([Ben Ammar et al., 2014]).

### 5.1.2 Procédure par séparation et évaluation

L'algorithme PSE que nous proposons utilise la recherche en profondeur d'abord : nous construisons une branche jusqu'à ce que nous obtenions une solution réalisable complète. A un nœud donné de l'arbre, si la borne inférieure correspondant à ce nœud est supérieure ou égale à la borne supérieure, la branche est coupée. Ensuite nous remontons d'un cran et essayons de construire une autre branche.

Nous présentons ci-dessous une borne inférieure de la fonction objectif. Cette borne est une généralisation de la borne inférieure proposée dans l'équation (3.13). Nous précisons

aussi qu'un minimum local sera utilisé en tant que borne supérieure et la technique de réduction de l'espace de recherche sera développée et utilisée.

### 5.1.2.1 Borne inférieure

Soit  $A = (X_{1,m}, \dots, X_{i,m}, \dots, X_{N_m,m})$  un vecteur qui représente les dates de lancement des ordres pour les composants de type  $c_{i,m}$ . Chaque variable de décision  $X_{k,m}$  est bornée par  $a_{k,m} = T - U_{k,m}$  et  $b_{k,m} = T - m$ .

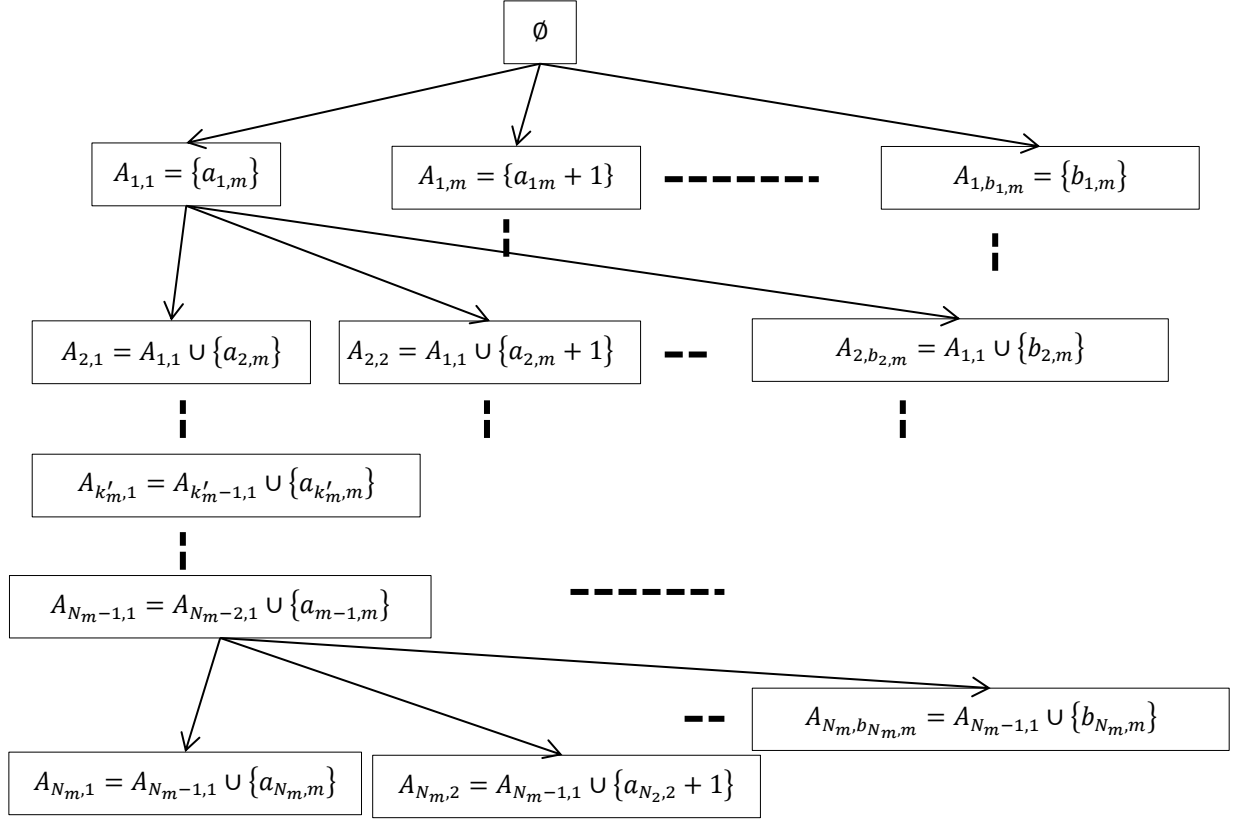
Un vecteur  $A_1 = (X_{1,m}, a_{2,m}, \dots, a_{k'_m,m}, \dots, a_{N_m,m})$  sera noté  $A_1 = \{X_{1,m}\}$ . Les nœuds au premier niveau de l'arbre de recherche correspondent aux différentes dates de lancement d'ordres au fournisseur  $X_{1,m}$  du premier composant de la nomenclature (voir **Figure 5.5**). Les vecteurs liés à ces nœuds sont définis comme suit:  $A_{1,i} = (a_{1,m} + i, \dots, a_{k'_m,m}, \dots, a_{N_m,m})$  avec  $i \in [0; b_{k,m}]$ . Ils seront, par la suite, écrits  $A_{1,i} = \{a_{1,m} + i\}$ . La première valeur  $a_{1,m} + i$  correspond à la date de lancement d'un ordre au fournisseur du premier composant. Les dates de lancement d'ordres d'approvisionnement pour les autres composants sont égales à  $a_{k,m}$ .

Soit le vecteur  $A_{k'_m, X_{k'_m,m}} = (X_{1,m}, \dots, X_{k'_m,m}, a_{k'_m+1,m}, \dots, a_{N_m,m})$  qui définit le nœud  $k'_m$  de l'arborescence. Ce vecteur de dates de lancement d'ordres d'approvisionnement aux fournisseurs est composé comme suit :

- $\forall k \in [1; k'_m - 1], X_{k,m}$  sont fixes et appartiennent à  $[a_{k,m}; b_{k,m}]$  (5.13)

- $X_{k'_m,2}$  est fixe et appartient à  $[a_{k'_m,m}; b_{k'_m,m}]$  (5.14)

- $\forall k \in [k'_m + 1; N_m], X_{k,m}$  sont fixes et égales à  $a_{k,m}$  (5.15)



**Figure 5.5 :** Représentation de l'arbre d'exploration

Nous allons introduire les notations complémentaires suivantes :

- Le composant  $c_{k'_l,l}$  est nécessaire pour l'assemblage du composant  $c_{z_{l-1},l-1}$ , il est le  $k'_l$ <sup>ème</sup> composant dans l'ordre de l'arborescence.
- $k''_l$  est défini comme suit : (5.16)
  - Si  $c_{k'_l,l}$  est le dernier composant nécessaire à l'assemblage de  $c_{z_{l-1},l-1}$  alors  $k''_l$  est égale à  $k'_l$ .

- Si  $c_{k'_l, l}$  n'est pas le dernier composant nécessaire à l'assemblage de  $c_{z_{l-1}, l-1}$  alors  $k''_l$  est égale à la somme des composants nécessaires à l'assemblage des composants  $c_{i, l-1} \forall i \in [1; z_{l-1}]$  du  $l - 1^{ème}$  niveau de la nomenclature.
- Le composant  $k''_l$  est nécessaire pour l'assemblage du composant  $c_{z'_{l-1}, l-1}$

Nous notons que lorsque  $k''_l = k'_l, z_{l-1} = z'_{l-1}$ .

Pour la suite, nous introduisons ces notations :

- $M_{i, l}^{i, l} : \forall k; X_{k, m} \geq a_{k, m}$  : la date d'assemblage du composant  $c_{i, l}$ . Les composants du dernier niveau  $m$  de la nomenclature du sous-système d'assemblage de  $c_{i, l}$  ont des dates de lancement d'ordres aux fournisseurs  $X_{k, m}$  supérieures ou égales à  $a_{k, m}$ .
- $M_{i, l}^{i, l} : \forall k > k'_m; X_{k, m} = a_{k, m}$  : la date d'assemblage du composant  $c_{i, l}$ . Les  $(N_m - k'_m)$  derniers composants du dernier niveau  $m$  de la nomenclature du sous-système d'assemblage de  $c_{i, l}$  ont des dates de lancement des ordres  $X_{k, m}$  égales à  $a_{k, m}$ .
- $M_{PF}^{+} : \forall k; X_{k, m} \geq a_{k, m}$  : le maximum entre  $M_{PF}$  et  $T$  où  $M_{PF}$  est la date d'assemblage du produit fini sachant que les dates de lancement des ordres d'approvisionnement  $X_{k, m}$  appartiennent aux intervalles de recherche  $[a_{k, m}; b_{k, m}]$  avec  $a_{k, m} = T - U_{k, m}$  et  $b_{k, m} = T - m$ .
- $M_{PF}^{+} : \forall k > k'_m; X_{k, m} = a_{k, m}$  : le maximum entre  $M_{PF}$  et  $T$  avec  $M_{PF}$  la date d'assemblage du produit fini dont les dates de lancement d'ordres d'approvisionnement  $X_{k, m}$  sont détaillées dans les expressions (5.13), (5.14) et (5.15).

**Proposition 5.4**

La borne inférieure qui correspond au vecteur  $A_{k', X_{k', m}}$  est composé de :

- Coût moyen de stockage des  $k'_m$  premiers composants du niveau  $m$  de la nomenclature. Ces composants ont des dates de lancement des ordres d'approvisionnement fixes (voir les expressions 5.13, 5.14 et 5.15) :

$$E[C_{SC_m}, A_{k'_m}] = \sum_{i=1}^{z_{m-1}} \left( \sum_{\substack{c_{k,m} \in S_{i,m-1} \\ k \leq k'_m}} h_{k,m} \left( E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^{i,m-1} \right] - E[L_{k,m} + a_{k,m}] \right) \right)$$

- Coût moyen de stockage des  $k'_l$  premiers composants  $c_{i,l}$ ,  $l = 2, \dots, m-1$  :

$$E[C_{SC_{2,\dots,m-1}}, A_{k'}] = \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{z'_l} \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} E[M_{i,l}] - \sum_{i=1}^{k'_{l+1}} h_{i,l+1} (E[M_{i,l+1}] + E[L_{i,l+1}]) \right)$$

- Coût moyen de stockage des  $z'$  premiers composants du premier niveau de la nomenclature :

$$E[C_{SC_1}, A_{k'}] = \sum_{i=1}^{z'_1} \left( h_{i,1} \left( E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^{PF} \right] - E[M_{i,1}] - E[L_{i,1}] \right) \right)$$

- Coût moyen de rupture en produit fini calculé sur la base du vecteur  $A_{k', X_{k', 2}}$  dont les éléments qui le composent sont définis dans les expressions (5.13), (5.14) et (5.15) :

$$E[C_{bPF}, A_{k'_m}] = b \times \left( E \left[ M_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}}^+{}^{PF} \right] - T \right)$$

La borne inférieure est égale à la somme des quatre coûts moyens ci-dessus.

$$\begin{aligned}
BI(A_{k'}) = & \sum_{i=1}^{z'_1} h_{i,1} E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m}=a_{k,m}}^{PF} \right] + b \left( E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m}=a_{k,m}}^{+PF} \right] - T \right) \\
& - \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{z'_l} \left[ \left( h_{i,l} - \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} \right) E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{i,l+1} \right] \right] \\
& + \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k''_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m}=a_{k,m}}^{z_l,l} \right] \\
& - \sum_{l=1}^{m-2} \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k''_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m}=a_{k,m}}^{v,l+1} \right] - \sum_{i=1}^{k'_m} h_{i,m} E[a_{i,m}] \\
& - \sum_{l=2}^m \sum_{i=1}^{k'_l} h_{i,l} E[L_{i,l}] - \sum_{i=1}^{z'_1} h_{i,1} E[L_{i,1}]
\end{aligned}$$

Où :

$z_l \in IN \setminus c_{k'_{l+1},l+1} \in S_{z_l,l}, z'_l \in IN \setminus c_{k''_{l+1},l+1} \in S_{z'_l,l}, c_{k''_{l+1}+1,l+1} \in S_{z'_l+1,l}, k''_{l+1} \leq k'_{l+1}$   
et  $z_l - 1 \leq z'_l \leq z_l$ .

Cette proposition est prouvée dans la démonstration (A.5) en annexe.

### 5.1.3 Algorithme génétique

Les propriétés et les bornes démontrées ci-dessus nous permettent d'appliquer l'algorithme PSE proposé dans le chapitre 3 pour obtenir des solutions exactes. Pour résoudre ce problème d'une manière approchée, l'AG ainsi que les différentes techniques proposées dans le chapitre 3 peuvent être utilisées. Nous optons pour la même méthode de sélection élitiste. Chaque individu est codé de la même façon, la longueur du chromosome est égale à  $N_m$  qui correspond au nombre de composants au niveau  $m$  du système d'assemblage étudié.



Après plusieurs tests numériques, nous avons choisi de construire la population initiale comme suit : elle est composée, d'abord, d'individus qui sont générés d'une manière aléatoire selon une distribution uniforme :  $X_{i,m} = rand(0, U_{i,m})$  pour  $i \in [1, 2, \dots, N_m]$ . Puis, nous appliquons la technique GSPI et donc la population initiale sera composée de :

Un seul minimum local obtenu en appliquant une procédure de RL sur des individus générés d'une manière aléatoire selon une distribution uniforme.

- Le reste de la population est généré d'une manière aléatoire selon une distribution uniforme.

Les autres techniques introduites dans le chapitre 3 seront également utilisées.

## 5.6 Étude expérimentale et résultats

Afin de vérifier l'efficacité de nos algorithmes ainsi que les différentes techniques proposées pour les améliorer, nous étudions dans un premier temps un système d'assemblage à trois niveaux. Dans un second temps, nous présentons les deux analyses suivantes :

- L'interdépendance entre le nombre de niveaux et le nombre de composants au dernier niveau  $m$  de la nomenclature (tous les systèmes d'assemblage sont composés de 39 composants et d'un produit fini).
- Celle de l'influence du coût unitaire de rupture en produit fini  $b$  sur la convergence de l'AG.

### 5.1.4 Exemples numériques

D'abord nous montrerons le comportement de la PSE et de l'AG sur l'instance suivante : Le système d'assemblage étudié est décrit dans la **Figure 5.2** :  $m = 3$ ,  $N_3 = 8$ ,  $N_2 = 4$ ,  $u_{i,j} = 5$ ,  $b = 1500$ ,  $r = 150$  et  $T = 15$ .

La distribution des probabilités des délais d’approvisionnement et les coûts de stockage des composants sont donnés dans les tableaux (5.2) et (5.3):

**Tableau 5.2 :** La distribution de probabilité des délais d’approvisionnement

Niveau de la nomenclature	$w$	1	2	3	4	5
1	$P[L_{1,1} = w]$	0,4	0,3	0,1	0,1	0,1
	$P[L_{2,1} = w]$	0,7	0,2	0,05	0,04	0,01
2	$P[L_{1,2} = w]$	0,5	0,3	0,1	0,05	0,05
	$P[L_{2,2} = w]$	0,25	0,15	0,2	0,2	0,2
	$P[L_{3,2} = w]$	0,15	0,3	0,2	0,15	0,2
	$P[L_{4,2} = w]$	0,7	0,2	0,05	0,04	0,01
3	$P[L_{1,3} = w]$	0,09	0,01	0,1	0,35	0,45
	$P[L_{2,3} = w]$	0,01	0,1	0,6	0,2	0,09
	$P[L_{3,3} = w]$	0,1	0,7	0,1	0,05	0,05
	$P[L_{4,3} = w]$	0,85	0,07	0,05	0,02	0,01
	$P[L_{5,3} = w]$	0,6	0,2	0,1	0,05	0,05
	$P[L_{6,3} = w]$	0,3	0,6	0,05	0,03	0,02
	$P[L_{7,3} = w]$	0,55	0,25	0,1	0,06	0,04
	$P[L_{8,3} = w]$	0,8	0,1	0,05	0,03	0,02

Le **Tableau 5.4** présente les limites supérieures de l’espace de recherche réduit, c.-à-d. les valeurs maximales des variables de décision  $X_{i,3}$  pour  $i = 1, \dots, 8$ , qui sont initialement comprises entre 0 et 12 ( $T - 3$ ).

**Tableau 5.3 :** Les coûts de stockage des composants

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$h_{i,3}$	36	28	45	42	4	27	17	4
$h_{i,2}$	56	40	37	21				
$h_{i,1}$	100	13						

Les résultats montrent que cet espace a été réduit de  $13^8 ((T - m + 1)^{N_m}) = 815730721$  à 12042240. Il a donc été réduit de  $\sim 67,74$  fois.

**Tableau 5.4 :** Les limites supérieures de l'espace de recherche réduit

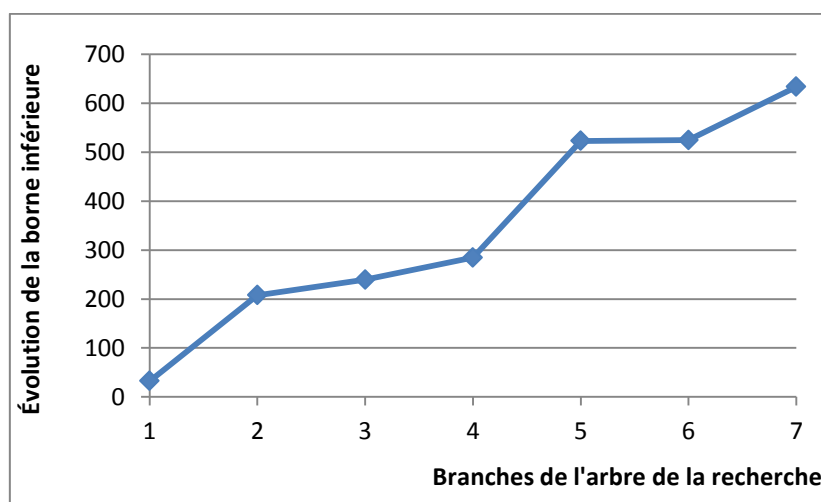
$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(X_{i,3}^*)$	6	7	7	8	8	8	8	10

En utilisant la PSE avec un minimum local (ML) comme borne supérieure, le coût minimal a été trouvé en 0,068 secondes et vaut 656,841.

**Tableau 5.5 :** Dates d'approvisionnement optimales

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8
$X_{i,3}^*$	3	4	3	4	1	3	3	5

Les dates de lancement optimales correspondant à ce coût minimal sont présentées dans le **Tableau 5.5**. L'évolution de la borne inférieure à chaque niveau de l'arbre d'énumération est présentée dans la **Figure 5.6**. Elle dépend du classement des composants de chaque niveau en fonction de leurs coûts de stockage (en commençant par les composants dont les coûts de stockage sont plus grand, la borne inférieure serait très proche de l'espérance du coût total).



**Figure 5.6 :** L'évolution de la borne inférieure

Le **Tableau 5.6** montre l'effet de renforcement de notre PSE avec un intervalle de recherche réduit (IR) et une borne supérieure égale à un ML: l'utilisation à la fois de ces propriétés permet de réduire, par rapport à une PSE de base, le temps de calcul ( $CPU_{réduction}$ ) de plus de 62 % et le nombre de branches finales gardées ( $bf g$ ) de plus de 71%.

**Tableau 5.6** : Effet des différentes propriétés sur le comportement de la PSE

Procédure utilisée	PSE+IR	PSE+IR+ML	PSE
$bf g$	65671	24725	85373
$CPU_{réduction}(\%)$	26,068	62,833	-

Les dates optimales ont été trouvées aussi par l'AG renforcé par une RL, une technique de GSPI et une procédure de perturbation P. Les résultats numériques (**Tableau 5.7**) sont donnés à partir de 100 tests sur le même exemple numérique.

**Tableau 5.7** : Effet des différentes techniques utilisées sur le comportement de l'AG

	Nombre de générations	$gap$ moyen (%)	$gap^*$ moyen de la MSC (%)	CPU Time (sec)
<b>AG</b>	373,010	70,188	0,558	0,087
<b>AG-P-RL</b>	117,660	69,956	0,002	0,027
<b>AG-GSPI-RL</b>	63,260	3,746	0,000	0,004
<b>AG-GSPI-P-RL</b>	14,830	3,495	0,000	0,001

L'espérance mathématique du coût total optimal a été trouvée par l'AG (non renforcée par les différentes techniques mentionnées ci-dessus) après 373,01 générations en moyenne. Le même AG renforcé par les différentes techniques mentionnées ci-dessus (AG-RL-GSPI-P) a trouvé la solution optimale au bout de 14,83 générations.

Le temps de calcul nécessaire pour trouver les solutions optimales par l'AG est en moyenne de 0,087 secondes. Ce temps, en utilisant AG-RL-GSPI-P, est de 0,001 secondes seulement.

Pour la suite, nous rappelons les notations suivantes :

- Le  $gap$  moyen entre la meilleure solution de la population initiale et la meilleure solution trouvée au bout de 1000 générations :  $gap = \frac{best_{sol_0} - best_{sol_{1000}}}{best_{sol_{1000}}} \times 100$
- Le  $gap^*$  moyen entre  $best_{sol_{1000}}$  c.-à-d. la meilleure solution trouvée au bout de 1000 générations et  $best_{sol^*}$ , c.-à-d. la meilleure solution connue (trouvée par la PSE jusqu'à 30 composants) :  $gap^* = \frac{best_{sol_{1000}} - best_{sol^*}}{best_{sol^*}} \times 100$

Comme c'est indiqué dans le **Tableau 5.7**, le  $gap$  moyen n'est que de 3,495 % dans le cas d'AG-GSPI-P-RL et le  $gap^*$  moyen est nul sauf pour le cas d'utilisation d'AG pur où est égal à 0,558 %.

L'exemple ci-dessous montre l'efficacité de l'AG renforcé par les différentes techniques. Dans la partie qui suit, nos méthodes ont été testées sur deux types de systèmes d'assemblage afin de connaître l'influence de la nomenclature, du coût de rupture et du nombre de niveaux sur la convergence des différents algorithmes.

### 5.1.5 Tests de performances

Les tests consistent à exécuter l'algorithme sur 10 nomenclatures différentes. Pour chaque nomenclature, 10 jeux de données ont été créés et pour chaque jeu de données, 100 tests sont faits. Pour ces nomenclatures, le nombre total des composants ( $Comp_{total}$ ) aux différents niveaux est toujours 39. Nous distinguons deux types de nomenclatures  $F_m$  et  $C_m$ . Dans les niveaux intermédiaires ( $l = 1, \dots, m - 1$ ) de  $F_m$ , le nombre de composants  $N_l$  est égal à 2, tandis que pour  $C_m$ ,  $N_l \geq 2$ . La nomenclature de chaque système d'assemblage est présentée dans le **Tableau 5.8** : Par exemple le système d'assemblage  $F_4$  est composé de 2 composants aux niveaux 1, 2 et 3 et 33 composants au niveau 4.

Les distributions de probabilité des délais d'approvisionnement sont les mêmes pour les différentes instances, les coûts de stockage des composants sont générés d'une manière aléatoire et respectent le fait que le coût de stockage d'un composant  $c_{i,l}$  est supérieur à la

somme des coûts de stockage des composants  $c_{k,l+1} \in S_{i,l}$  qui le composent. Nous avons fait le choix que tous les produits finis pour les tests de type  $F_m$  ainsi que les exemples de type  $C_m$  dont le nombre de niveaux est inférieur à 3 ( $m \leq 3$ ) aient un coût de rupture  $b = 1000$ , et que les  $C_m$  avec plus de 4 niveaux aient un coût de rupture  $b = 10000$ .

**Tableau 5.8 :** Nomenclatures des différents systèmes d'assemblage.

	$F_2$	$C_2$	$F_3$	$C_3$	$F_4$	$C_4$	$F_5$	$C_5$	$F_6$	$C_6$
$N_1$	2	4	2	2	2	4	2	2	2	2
$N_2$	37	35	2	4	2	7	2	4	2	4
$N_3$			35	33	2	9	2	8	2	8
$N_4$					33	19	2	9	2	8
$N_5$							31	16	2	8
$N_6$									29	9
<b>Comp<sub>total</sub></b>	39	39	39	39	39	39	39	39	39	39

Après des tests préliminaires, les paramètres suivants ont été fixés : la taille de la population initiale  $Pop_0$  est égale à 60, le nombre de génération  $Max\_génération$  est égale à 1000, un taux de croisement de 95 % et un taux de mutation de 5 %. Le **Tableau 5.9** montre l'influence de la technique GSPI, de la procédure de perturbation P et de la RL sur la convergence de l'AG. Nous notons que dans cette partie nous analysons un possible lien entre le nombre de niveaux  $l$  et le nombre de composants à chaque niveau  $N_l$ .

La **Figure 5.7** montre que le nombre de niveaux dans la nomenclature n'affecte pas le nombre d'itérations (générations) nécessaires pour que la Meilleure Solution Connue (MSC) soit trouvée. L'efficacité de la technique GSPI est visible sur la même figure ; cette technique permet de réduire le nombre moyen de générations nécessaire pour trouver les meilleures dates de lancement d'ordres (quel que soit le nombre de niveaux, moins de 100 itérations sont nécessaires pour que la MSC soit trouvée).

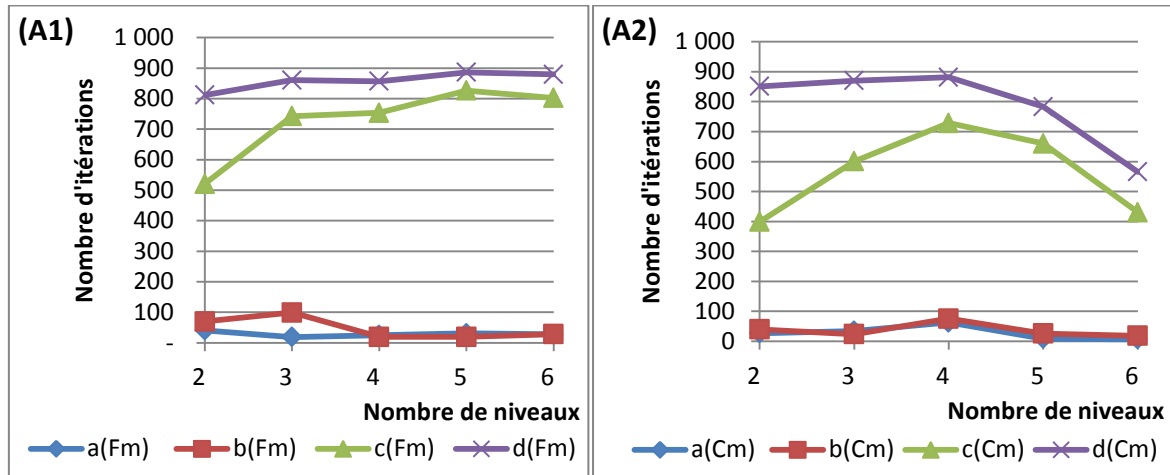
**Tableau 5.9 : L'influence des différentes techniques sur l'AG**

Nombre de générations			<i>gap</i> moyen (%)		<i>gap</i> * moyen de la MSC (%)		CPU Time (sec)	
AG								
<i>m</i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>
2	811,58	851,010	442,49	333,206	55,617	126,699	0,0355	0,053
3	860,43	870,043	129,51	282,386	29,766	33,825	0,2322	0,325
4	856,94	881,265	73,68	816,849	4,014	4,633	1,3713	3,262
5	886,12	782,940	69,35	478,548	2,166	1,707	2,8368	8,391
6	879,58	565,357	78,03	221,144	2,400	1,470	11,4405	15,530
AG-P-RL								
<i>m</i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>
2	520,76	398,710	649,31	717,315	9,612	0,051	0,0319	0,030
3	742,68	600,689	169,83	494,654	6,918	0,057	0,2665	0,343
4	753,55	728,667	81,37	873,007	0,099	0,423	1,5736	4,342
5	826,53	660,300	70,08	476,113	0,224	0,132	3,0544	9,058
6	802,27	430,380	80,17	217,743	0,100	0,086	15,8459	17,227
AG-GSPI								
<i>m</i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>
2	69,98	39,608	64,35	0,852	10,727	0,000	0,0044	0,003
3	99,24	23,397	11,78	3,204	0,370	0,022	0,0272	0,013
4	19,61	75,208	0,36	6,220	0,235	0,079	0,0705	0,363
5	19,26	25,694	0,14	2,273	0,006	0,022	0,1349	0,350
6	28,54	18,080	0,08	1,235	0,008	0,000	0,6199	0,373
AG-GSPI-P-RL								
<i>m</i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>	<i>F<sub>m</sub></i>	<i>C<sub>m</sub></i>
2	40,84	26,481	63,04	0,894	10,042	0,000	0,0038	0,003
3	18,84	34,118	5,19	2,025	0,007	0,001	0,0087	0,025
4	25,02	62,373	0,33	4,904	0,002	0,055	0,0527	0,350
5	30,90	8,600	0,33	2,526	0,000	0,000	0,1644	0,164
6	27,84	6,068	0,07	5,337	0,001	0,000	0,5946	0,194

Cependant, le nombre moyen de générations nécessaires pour trouver les dates optimales dépend du coût de rupture du produit fini. Nous rappelons que nous avons fait ces choix :

- Tous les produits finis pour les tests de type  $F_m$  ont un coût de rupture  $b = 1000$ ,
- Tous les produits finis pour les tests de type  $C_m$  dont le nombre de niveaux est inférieur à 3 ( $m \leq 3$ ) ont un coût de rupture  $b = 1000$ ,
- Les  $C_m$  avec plus de 4 niveaux ont un coût de rupture  $b = 10000$ .

Nous apercevons dans la partie A2 (qui concerne les système d'assemblage de type  $C_m$ ) de la **Figure 5.7** une baisse de nombre d'itérations nécessaires pour que la Meilleure Solution Connue (MSC) soit trouvée que pour les cas où le problème est optimisé par les deux algorithmes AG pur et AG-P-RL. Cette baisse est donc due à l'augmentation du coût de rupture.



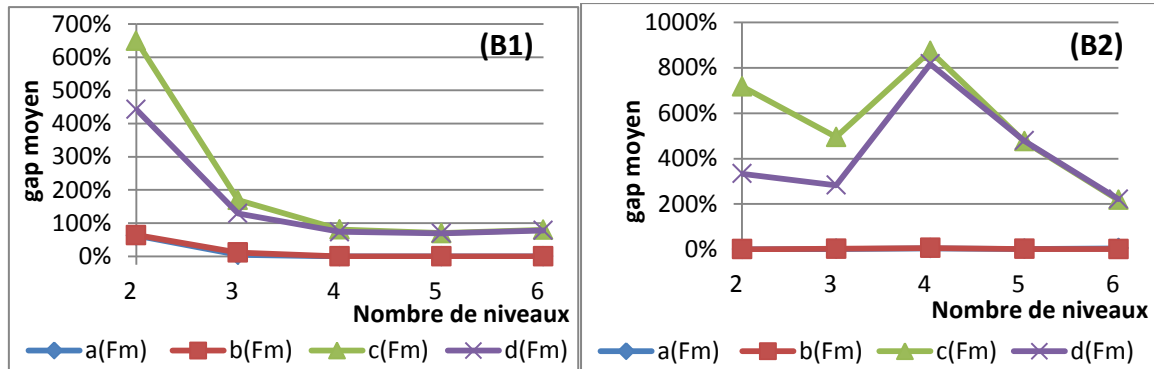
$a(.)$ : AG-GSPI-P-RL,  $b(.)$ : AG-GSPI,  $c(.)$ : AG-P-RL,  $d(.)$ : AG

**Figure 5.7** : L'évolution du nombre moyen de générations en fonction du nombre de niveaux

La **Figure 5.8** présente l'évolution du gap moyen en fonction du nombre de niveaux. Ce gap diminue quand le nombre de niveaux augmente, à l'exception de  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C_5$  où l'augmentation de 10 fois du coût unitaire de rupture en produit fini  $b$  l'a fait augmenter.



L'exemple de  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C_5$  prouve qu'il y a une influence du rapport « coût unitaire de stockage/coût unitaire de rupture en produit fini » sur le gap.



$a(.)$ : AG-GSPI-P-RL,  $b(.)$ : AG-GSPI,  $c(.)$ : AG-P-RL,  $d(.)$ : AG

**Figure 5.8** : L'évolution du gap moyen en fonction du nombre de niveaux

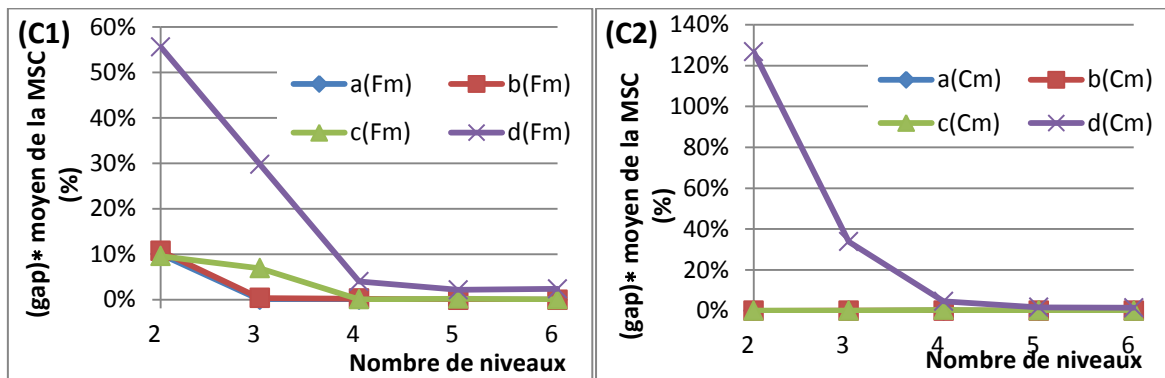
Cependant ce gap moyen reste, quel que soit le nombre de niveaux, supérieur à 70 % (respectivement 221,144 %) pour les systèmes d'assemblage de type  $F_m$  (respectivement  $C_m$ ) qui ont été optimisés par l'AG et l'AG-P-RL.

En même temps, le même gap reste largement faible pour les systèmes d'assemblage optimisés par l'AG-GSPI et l'AG-GSPI-P-RL. Ce qui prouve que la technique de GSPI génère une population initiale de bonne qualité.

La **Figure 5.9** montre que l'AG-GSPI-P-RL, l'AG-P-RL et l'AG-GSPI sont plus efficaces que l'AG pur et que presque seul la convergence de ce dernier dépend du nombre de niveaux  $m$ . Cela est expliquée par :

- L'AG pur converge bien vers les meilleures solutions connues quand le nombre de niveaux augmente. Dans ce cas, le nombre de composants au dernier niveau de la nomenclature diminue : Il fournit des solutions approchées à plus de 120 % des meilleures solutions connues pour l'optimisation des systèmes d'assemblage à 2 niveaux et à moins de 3% pour les systèmes d'assemblage à 6 niveaux.

- L'AG-GSPI-P-RL et l'AG-GSPI partent d'une population initiale qui contient au moins un optimum local, ce qui explique bien un  $gap^*$  moyen faible.
- L'AG-GSPI-P-RL et l'AG-P-RL utilisent une procédure de perturbation et une recherche locale qui renforcent considérablement les opérations de croisement et de mutation ce qui leur permet de fournir des solutions approchées très proches des meilleures solutions connues



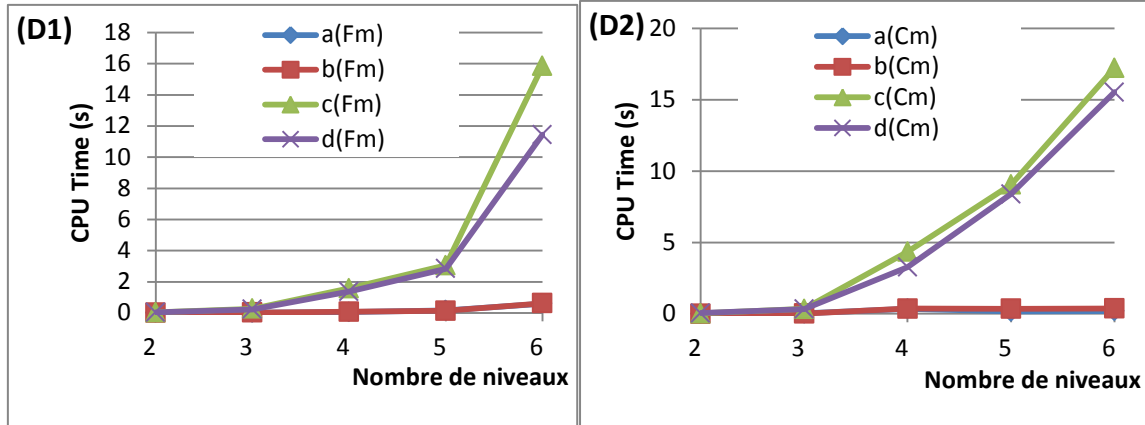
$a(.)$ : AG-GSPI-P-RL,  $b(.)$ : AG-GSPI-RL,  $c(.)$ : AG-P-RL,  $d(.)$ : AG

Figure 5.9 : L'évolution du  $gap^*$  moyen en fonction du nombre de niveaux

Dans la **Figure 5.10**, nous présentons les temps de calcul moyens en seconde. Nous remarquons que, pour des systèmes d'assemblage composés du même nombre de composants (39 composants dans chaque système d'assemblage), le temps de calcul dépend du nombre de niveaux dans la nomenclature.

Nous précisons aussi que le temps de calcul de l'AG-GSPI-P-RL et de l'AG-GSPI évoluent lentement et restent très petits (moins d'une seconde), alors que le temps de calcul de l'AG et de l'AG-P-RL évoluent rapidement en fonction du nombre de niveaux.

Dans la partie qui suit, nous analysons l'effet du coût de rupture  $b$  du produit fini (par rapport au coût de stockage  $r$  de celui-ci) sur le comportement des différents algorithmes proposés. Nous étudions seulement les deux systèmes d'assemblages  $F_3$  et  $C_3$  mentionnés ci-dessus et nous faisons varier le coût de rupture  $b$ .



$a(.)$ : AG-GSPI-P-RL,  $b(.)$ : AG-GSPI,  $c(.)$ : AG-P-RL,  $d(.)$ : AG

**Figure 5.10** : Comparaison des temps de calcul moyens (avant que la meilleure solution ne soit trouvée)

Nous présentons les résultats numériques des différents jeux de données dans les tableaux (5.10, 5.11, 5.11 et 5.10) et les figures (5.11, 5.12, 5.13 et 5.14). Ces résultats montrent l'influence du coût unitaire de rupture en produit fini sur la convergence des différents algorithmes. La première colonne de chaque tableau présente le coût unitaire de rupture en produit fini en fonction du coût unitaire du stockage de celui-ci. Les autres colonnes présentent les résultats de  $F_3$  et  $C_3$ . Dans chaque colonne du **Tableau 5.10**, nous présentons le nombre moyen de générations obtenues pour trouver la meilleure solution. Les temps de calcul sont détaillés dans le **Tableau 5.12**.

Pour les algorithmes AG-GSPI-P-RL, AG-GSPI et AG, le nombre moyen de générations ne dépend pas de  $b$ . Cependant  $F_3$  (respectivement  $C_3$ ) requiert beaucoup moins de générations (46,811) (53,309 pour  $C_3$ ) en moyenne quand l'AG-GSPI-P-RL est utilisé. Mais en utilisant l'AG pur,  $F_3$  requiert en moyenne 872,995 (848,786 pour  $C_3$ ).

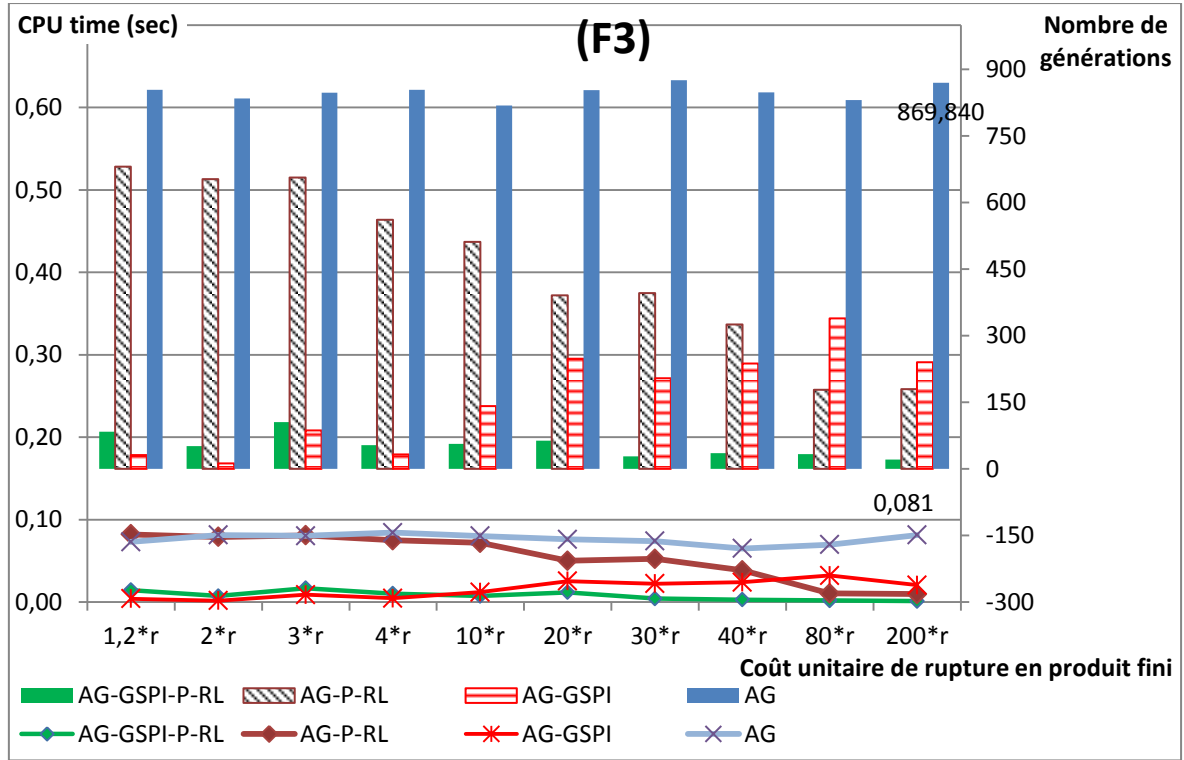
Nous notons aussi que, en utilisant l'AG-P-RL pour les deux systèmes d'assemblage  $F_3$  et  $C_3$ , le nombre moyen de générations avant que les meilleures solutions soient trouvées ainsi que le temps de calcul sont décroissants quand le coût unitaire de rupture en produit fini augmente (voir **Figure 5.11** et **Tableau 5.12**).

**Tableau 5.10 :** Nombre moyen de générations avant que les meilleures solutions ne soient trouvées

Nombre de générations								
Coût unitaire de rupture $b$	$F_3$				$C_3$			
	AG-GSPI-P-RL	AG-P-RL	AG-GSPI	AG	AG-GSPI-P-RL	AG-P-RL	AG-GSPI	AG
$1, 2 \times r$	84,090	681,400	31,300	853,810	15,830	626,700	16,090	864,350
$2 \times r$	51,360	652,770	12,290	834,930	45,870	507,310	35,040	856,680
$3 \times r$	105,200	656,890	86,530	847,490	9,850	519,210	22,200	820,270
$4 \times r$	53,340	561,550	32,740	854,360	16,010	432,820	54,180	874,760
$10 \times r$	56,670	511,400	141,850	818,450	52,720	388,790	126,300	867,130
$20 \times r$	63,380	390,860	248,620	853,560	157,830	413,820	152,190	893,990
$30 \times r$	28,527	396,350	204,010	875,710	21,214	393,000	167,820	876,770
$40 \times r$	35,910	325,400	237,510	848,700	31,386	376,020	131,410	896,500
$80 \times r$	33,241	178,500	339,310	831,010	34,588	261,300	294,840	877,010
$200 \times r$	21,368	179,524	240,350	869,840	82,809	236,176	226,970	902,490

**Tableau 5.11 :** Temps de calcul nécessaires pour trouver les meilleures solutions

CPU Time (sec)								
Coût unitaire de rupture $b$	$F_3$				$C_3$			
	AG-GSPI-P-RL	AG-P-RL	AG-GSPI	AG	AG-GSPI-P-RL	AG-P-RL	AG-GSPI	AG
$1, 2 \times r$	0,015	0,082	0,004	0,073	0,008	0,127	0,004	0,112
$2 \times r$	0,007	0,079	0,002	0,081	0,011	0,098	0,007	0,129
$3 \times r$	0,017	0,081	0,009	0,080	0,003	0,088	0,004	0,116
$4 \times r$	0,010	0,075	0,005	0,084	0,002	0,052	0,010	0,111
$10 \times r$	0,007	0,072	0,012	0,080	0,014	0,074	0,023	0,121
$20 \times r$	0,012	0,050	0,025	0,076	0,038	0,084	0,027	0,131
$30 \times r$	0,004	0,052	0,022	0,074	0,006	0,089	0,028	0,130
$40 \times r$	0,003	0,038	0,024	0,065	0,003	0,034	0,018	0,087
$80 \times r$	0,002	0,010	0,032	0,070	0,004	0,032	0,044	0,131
$200 \times r$	0,001	0,010	0,021	0,081	0,009	0,021	0,032	0,115



**Figure 5.11 :** Nombre moyen de générations et CPU time pour  $F_3$

Ceci peut être expliqué du fait que dans le cas de l'AG-P-RL, pour un coût unitaire de rupture  $b$  grand (largement supérieur au coût unitaire de stockage  $r$ ), les composants au dernier niveau sont commandés le plutôt possible pour que l'espérance du coût de rupture en produit fini  $b \times (E[M_{PF}^+] - T)$  soit le plus petit possible. Du coup, l'espace de recherche se réduit en fonction du rapport « coût unitaire de rupture / coût de stockage en produit fini ». La recherche locale ainsi que la perturbation interviennent à chaque génération et améliorent considérablement la qualité de la nouvelle population : l'énumération des voisins conduit en général à la découverte de voisins de meilleure qualité, ce qui accélère la convergence de l'algorithme vers la meilleure solution trouvée et diminue le nombre moyen de générations nécessaire pour les trouver.

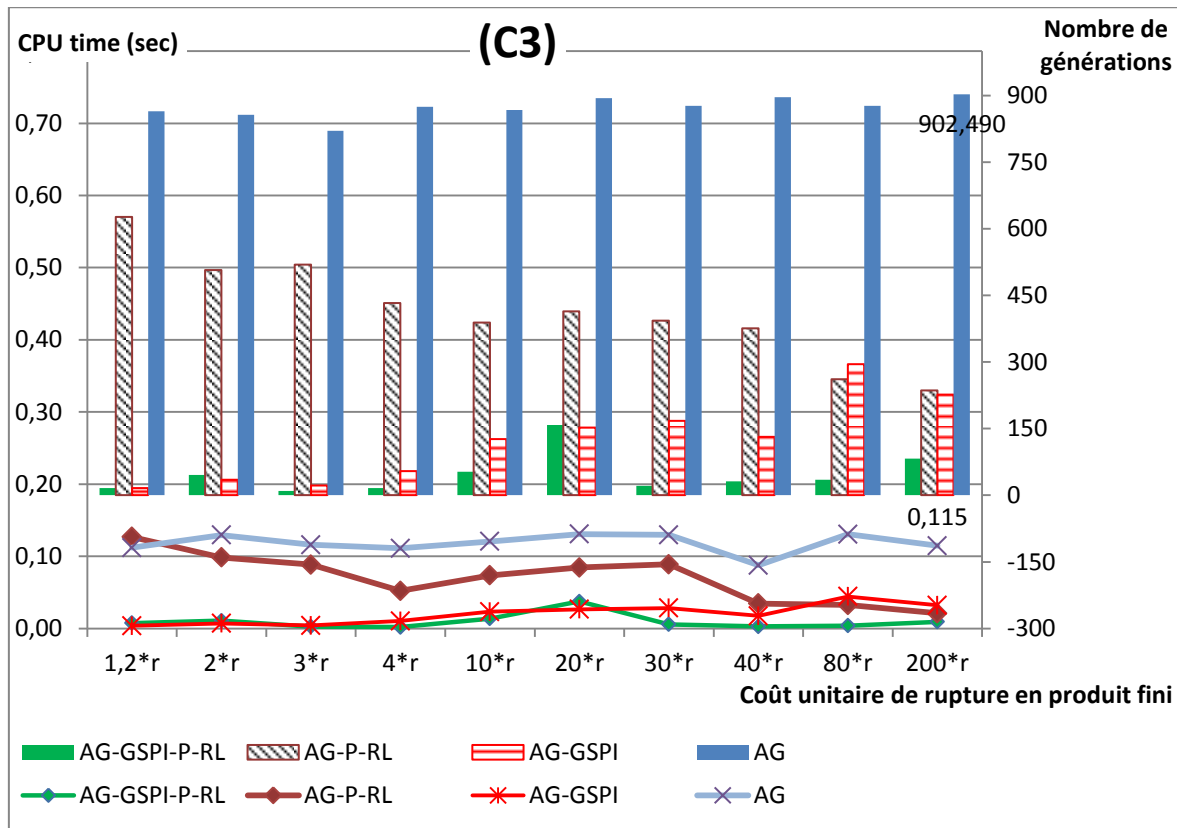
La même constatation est visible sur la **Figure 5.12** (respectivement la **Figure 5.13**). D'une part, le *gap moyen* est croissant et atteint 14499,676 % (respectivement 17492,328 %) quand  $b = 200 \times r$ . D'autre part, le *gap\* moyen* reste très petit (moins de 2 %).

**Tableau 5.12 : Gap moyen**

<b>Gap moyen (%)</b>								
<b>Coût unitaire de rupture <math>b</math></b>	<b><math>F_3</math></b>				<b><math>C_3</math></b>			
	<b>AG-GSPI-P-RL</b>	<b>AG-P-RL</b>	<b>AG-GSPI</b>	<b>AG</b>	<b>AG-GSPI-P-RL</b>	<b>AG-P-RL</b>	<b>AG-GSPI</b>	<b>AG</b>
<b><math>1, 2 \times r</math></b>	1,703	237,705	2,825	170,167	0,526	213,771	0,850	165,462
<b><math>2 \times r</math></b>	0,116	302,652	1,811	228,761	0,597	285,283	0,292	229,216
<b><math>3 \times r</math></b>	2,958	399,508	0,780	297,390	0,203	375,511	0,804	281,445
<b><math>4 \times r</math></b>	4,653	481,937	6,077	362,991	0,967	474,109	1,864	348,053
<b><math>10 \times r</math></b>	8,369	973,185	17,580	646,354	5,441	1047,039	8,818	591,242
<b><math>20 \times r</math></b>	13,982	1754,123	13,263	898,349	13,393	1952,664	6,989	813,882
<b><math>30 \times r</math></b>	24,942	2490,551	10,592	990,903	23,292	2874,574	28,519	1090,554
<b><math>40 \times r</math></b>	9,031	3259,481	8,027	1195,950	24,915	3681,740	36,657	1151,753
<b><math>80 \times r</math></b>	2,503	5952,177	6,530	1483,340	48,342	7330,478	29,216	1331,048
<b><math>200 \times r</math></b>	244,949	14499,676	9,673	1668,673	201,079	17492,328	188,903	1805,081

Dans le **Tableau 5.12**, pour un  $b$  grand et quel que soit le type de système d'assemblage, le *gap moyen* reste supérieur à 100 % pour les algorithmes qui n'utilisent pas la technique GSPI. Cependant, l'introduction de la technique GSPI, de la RL et de la perturbation ont permis de réduire le *gap\* moyen* et de fournir des solutions de bonne qualité en un temps de calcul raisonnable (voir **Figure 5.12** et **Figure 5.13**) : A part l'AG, les autres algorithmes ont un *gap\* moyen* stable et inférieur à 1%. D'une part, La technique GSPI permet de partir d'une population initiale de bonne qualité et qui contient des minimums locaux, et d'autre part, la perturbation ainsi que la recherche locale renforcent les opérateurs de croisement et de mutation pour que l'algorithme converge vers une solution approchée de bonne qualité. L'AG-GSPI-P-RL a révélé sa grande efficacité pour fournir des solutions approchées de bonne qualité quelques soient le type de système

d'assemblage, la taille de l'instance ainsi que la variabilité du coût de rupture en produit fini.



**Figure 5.12 :** Nombre moyen de générations et CPU time pour  $C_3$

Nous notons que l'AG fournit le plus souvent des solutions médiocres (quel que soit le type de système d'assemblage, pour un  $b = 1,2 \times r$ , le  $gap^*$  moyen est supérieur à 18 %, et dépasse le 1000 % quand  $b = 200 \times r$ ). Il ne peut garantir une solution de bonne qualité que si le coût de rupture en produit fini est légèrement supérieur au coût de stockage de celui-ci. Ceci est expliqué du fait que, pour un coût de rupture en produit fini largement supérieur au coût de stockage du produit fini, les opérations de croisement et de mutation ne sont pas suffisantes pour explorer l'espace de recherche initiale et pour trouver la partie de ce même espace pour laquelle le produit fini ne risque pas d'être en rupture de stocks.

D'une manière générale, l'avantage de l'AG-GSPI-P-RL réside dans la bonne qualité des solutions proposées ainsi que dans sa rapidité (demande un nombre petit de générations pour trouver la meilleure solution) ; le temps de calcul nécessaire augmente très lentement comparé à l'AG et l'AG-GSPI.

**Tableau 5.13 :** Gap\* moyen avec la meilleure solution connue

<b>Gap* moyen de la MSC (%)</b>								
<b>Coût unitaire de rupture <math>b</math></b>	<b><math>F_3</math></b>				<b><math>C_3</math></b>			
	<b>AG-GSPI-P-RL</b>	<b>AG-P-RL</b>	<b>AG-GSPI</b>	<b>AG</b>	<b>AG-GSPI-P-RL</b>	<b>AG-P-RL</b>	<b>AG-GSPI</b>	<b>AG</b>
<b><math>1, 2 \times r</math></b>	0,013	1,385	0,022	27,842	0,000	0,260	0,015	18,312
<b><math>2 \times r</math></b>	0,114	1,589	0,089	26,190	0,000	0,052	0,014	18,832
<b><math>3 \times r</math></b>	0,021	0,872	0,057	28,157	8,950	9,002	8,965	39,154
<b><math>4 \times r</math></b>	0,002	0,207	0,043	27,417	0,000	0,014	0,007	32,043
<b><math>10 \times r</math></b>	0,003	0,038	0,242	57,687	0,003	0,018	0,026	72,434
<b><math>20 \times r</math></b>	0,002	0,028	0,474	128,930	0,005	0,130	0,087	134,142
<b><math>30 \times r</math></b>	0,008	0,034	0,507	162,413	0,004	0,026	0,107	214,601
<b><math>40 \times r</math></b>	0,010	0,144	0,408	240,260	0,000	0,039	0,083	269,756
<b><math>80 \times r</math></b>	0,000	0,121	1,693	443,186	0,011	0,032	0,267	500,711
<b><math>200 \times r</math></b>	0,006	0,058	4,001	1015,894	0,000	0,003	0,295	1113,419



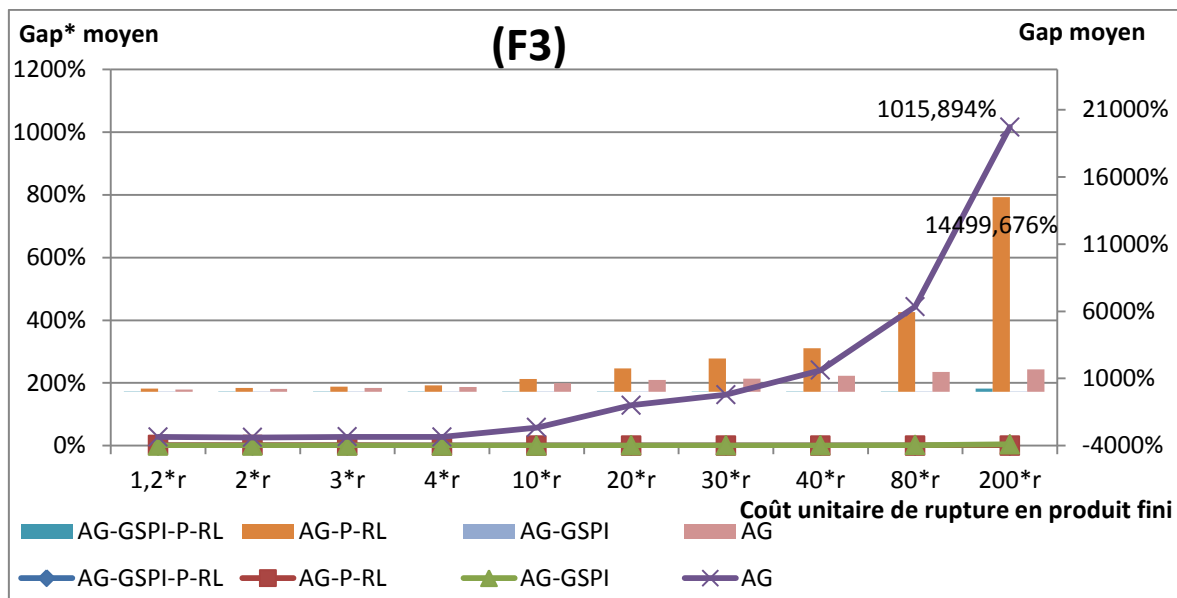


Figure 5.13 : *gap\* moyen* et *gap moyen* de  $F_3$

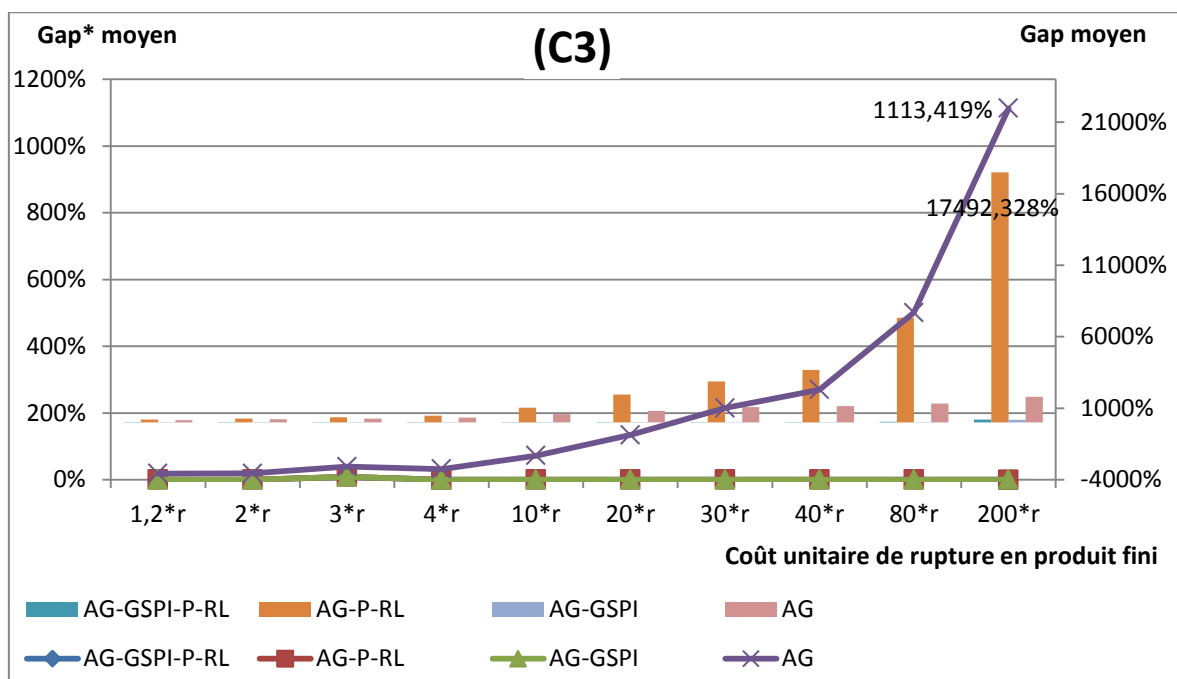


Figure 5.14 : *gap\* moyen* et *gap moyen* de  $C_3$

## **5.2 Conclusions**

Dans ce chapitre, nous avons proposé un modèle analytique permettant l'étude des systèmes d'assemblage multi-niveaux quand les délais d'approvisionnement en composants sont incertains. Le critère considéré est l'espérance mathématique du coût total qui est composé des coûts de stockage des composants ainsi que des coûts de rupture et de stockage du produit fini.

Une PSE et un AG ont été développés. L'AG a été renforcé par une technique de génération spécifique de la population initiale, une procédure de perturbation et une recherche locale. Un grand nombre d'instances a été utilisé afin de tester son efficacité. Une comparaison entre les différentes techniques utilisées pour l'amélioration de l'AG a été faite (en termes de qualité de la population initiale et de la meilleure solution, ainsi que la rapidité de sa convergence vers la meilleure solution connue).

Les tests ont montré l'efficacité de l'AG renforcé par les différentes techniques proposées.

## **Conclusions Générales**

En entreprise, les stocks de sécurité permettent de faire face aux ruptures de stocks dues aux aléas ; mais ils sont aussi une charge financière et une immobilisation de capitaux. Ils doivent être dimensionnés en fonction de plusieurs critères comme le degré d'incertitude, le niveau de service souhaité, et les coûts liés au stockage et à la rupture. Les délais de sécurité sont aussi utilisés pour couvrir l'incertitude sur les dates de disponibilité du produit fini et des composants.

Dans cette présente thèse nous nous sommes intéressés aux systèmes d'assemblage multi-niveau quand les délais d'approvisionnement sont incertains. Dans le chapitre 1, nous avons présenté des généralités sur la gestion de stocks et la planification de production, en nous arrêtant plus en détails sur les techniques utilisées dans cette thèse.

Dans le chapitre 2, l'état de l'art sur la gestion des approvisionnements sous incertitudes a été présenté. Nous avons souligné un intérêt particulier à la politique de type MRP. Une classification des problèmes en fonction du type de chaîne logistique a été faite. Nous avons étudié les différentes sources d'incertitudes et plus particulièrement la variabilité des délais d'approvisionnement. Les méthodes et les techniques qui sont proposées pour faire face à ce type d'incertitude ne sont pas suffisamment développées. Seule la variabilité sur la demande est largement analysée. Sous la variabilité des délais d'approvisionnement, plusieurs études concernant les structures linéaires multi-niveaux existent, et celles qui traitent les systèmes d'assemblage sont rares, surtout les systèmes à plus d'un niveau.

Dans les chapitres 3 et 4, nous avons étudié les systèmes d'assemblage à deux niveaux. Nous avons choisi comme critère l'espérance mathématique du coût total qui est égal à la somme du coût de stockage des composants et des coûts de rupture et de stockage du produit fini. Nous avons développé : (1) un algorithme d'optimisation basé sur la technique de séparation et d'évaluation. Les tests montrent l'efficacité de l'algorithme ainsi que des techniques proposées pour résoudre, d'une manière exacte, des problèmes de petites tailles et de tailles moyennes ; (2) une méta-heuristique basée sur un algorithme génétique renforcée par plusieurs techniques ; cette méta-heuristique a permis de résoudre des

problèmes de taille plus importante en garantissant un bon compromis entre la qualité des résultats obtenus et le temps de calcul.

Le chapitre 5 a été dédié à la généralisation du modèle analytique proposé aux systèmes d'assemblage multi-niveaux. Une procédure par séparation et évaluation et un algorithme génétique ont été développés. L'algorithme génétique proposé a été renforcé par une technique de génération spécifique de la population initiale, une procédure de perturbation et une recherche locale. Il a fourni des résultats de bonne qualité en un temps de calcul raisonnable comparé aux autres méthodes de résolution. Dans ce chapitre, nous avons montré que la résolution du problème ne dépend pas seulement de la méthode de résolution et du nombre de niveaux, mais aussi des coûts de rupture et de stockage du produit fini, et de la structure du système d'assemblage.

Concernant les perspectives à court terme, nos travaux se focaliseront sur l'utilisation des différentes techniques proposées dans le cas plus général où à la fois la demande et les délais d'approvisionnement sont incertains. A moyen terme, nous allons essayer d'étudier des systèmes d'assemblage multi-période, multi-produit ou encore des systèmes où les nomenclatures se croisent.

## Bibliographie

- [Arda, 2008] Arda, Y. (2008). *Politiques d'approvisionnement dans les systèmes à plusieurs fournisseurs et optimisation des décisions dans les chaînes logistiques décentralisées*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.
- [Axsäter, 2005] Axsäter, S. (2005). Planning order releases for an assembly system with random operation times. *Operations Research Spectrum*, 27:459–470.
- [Axsäter, 2006] Axsäter, S. (2006). *Inventory control*, 2nd édition, Srpinger.
- [Babai, 2005] Babai, M. (2005). *Politiques de pilotage de flux dans les chaînes logistiques: impact de l'utilisation des prévisions sur la gestion de stocks*. PhD thesis, École centrale Paris.
- [Barbara-Gutiérrez and Adenso-Diaz, 2009] Barbara-Gutiérrez, Y. and Adenso-Diaz, B. (2009). Reverse MRP under uncertain and imprecise demand. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 40:413–424.
- [Ben Ammar et al., 2013a] Ben Ammar, O., Dolgui, A., Hnaien, F., and Ould Louly, M. (2013a). Supply planning and inventory control under lead time uncertainty: A review. In *In Proceedings of the IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control (MIM'2013)*, pages 359–370, St Petersburg, Russia. Elsevier Science.
- [Ben Ammar et al., 2013b] Ben Ammar, O., Hnaien, F., Marian, H., and Dolgui, A. (2013b). Planification des réapprovisionnements pour système d'assemblage à deux niveaux quand les délais d'approvisionnement sont aléatoires. In *Résumés du 14e Congrès Annuel de la Société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision (ROADEF 2013)*, Troyes (France).
- [Ben Ammar et al., 2012] Ben Ammar, O., Marian, H., and Dolgui, A. (2012). Configuration d'un système d'assemblage multi-niveau sous incertitudes des délais d'approvisionnement. In *9th International Conference on Modeling, Optimization and SIMulation (MOSIM'12)*, Bordeaux (France).

- [Ben Ammar et al., 2013c] Ben Ammar, O., Marian, H., and Dolgui, A. (2013c). Optimization for supply planning in multi-level assembly systems with stochastic lead-times. In *5th International Conference on Industrial Engineering and System Management (IESM'13)*, Rabat (Morocco).
- [Ben Ammar et al., 2014] Ben Ammar, O., Marian, H., and Dolgui, A. (2014). Genetic algorithm for multi-level assembly systems under stochastic lead times. In *In Proceedings of IFAC World Congress*, Cape Town South Africa.
- [Ben Ammar et al., 2013d] Ben Ammar, O., Marian, H., Dolgui, A., and Wu, D. (2013d). Mathematical model for supply planning of multi-level assembly systems with stochastic lead times. In *In Proceedings of the IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control (MIM'2013)*, St Petersburg, Russia.
- [Bragg, 1999] Bragg, D. J. (1999). The effects of partial order release and component reservation on inventory and customer service performance in an MRP environment. *International Journal of Production Research*, 37(3):523–538.
- [Brahimi, 2004] Brahimi, N. (2004). *Planification de la production : modèles et algorithmes pour les problèmes de dimensionnement de lots*. PhD thesis, Université de Nantes.
- [Brennan and Gupta, 1993] Brennan, L. and Gupta, S. (1993). A structured analysis of Material Requirements Planning systems under combined demand and supply uncertainty. *International Journal of Production Research*, 31:1689–707.
- [Buzacott and Shanthikumar, 1994] Buzacott, J. A. and Shanthikumar, J. G. (1994). Safety stock versus safety time in MRP controlled production systems. *Management Science*, 40(12):1678–1689.
- [Camisullis and Giard, 2010] Camisullis, C. and Giard, V. (2010). Détermination des stocks de sécurité dans une chaîne logistique-amont dédiée à une production de masse de produits fortement diversifiés. Laboratoire d'Analyse et Modélisation de Systèmes pour l'Aide à la Décision.
- [Chaharasooghi and Heydari, 2010] Chaharasooghi, S. and Heydari, J. (2010). LT variance or LT mean reduction in supply chain management: Which one has a higher impact on SC performance? *European Journal of Operational Research*, 204-1:86–95.

- [Chauhan et al., 2009] Chauhan, S., Dolgui, A., and Proth, J.-M. (2009). A continuous model for supply planning of assembly systems with stochastic component procurement times. *International Journal of Production Economics*, 120:411–417.
- [Chu et al., 1993] Chu, C., Proth, J.-M., and Xie, X. (1993). Supply management in assembly systems. *Naval Research Logistics (NRL)*, 40(7):933–949.
- [Damand et al., 2011] Damand, D., Barth, M., and Dkhil, A. (2011). Paramétrage de la méthode MRP en environnement incertain : une revue de la littérature. *Revue Française de Gestion Industrielle*, 30(1):75–105.
- [Damand et al., 2013a] Damand, D., Ben Ammar, O., Lepori, E., and Barth, M. (2013a). Analysis method of the relations between MRP parameter and performance indicator based on a literature review. St Petersburg, Russia. In Proceedings of the IFAC Conference on Manufacturing Modelling, Management and Control (MIM'2013), N. Bakhtadze, A. Dolgui, V. Lototsky (Eds.), Elsevier Science, 2013, IFAC-PapersOnline.net (ISSN 1474-6670). 6 pages.
- [Damand et al., 2013b] Damand, D., Derrouiche, R., and Barth, M. (2013b). Parameterisation of the MRP method: automatic identification and extraction of properties. *International Journal of Production Research*, 51(18):5658–5669.
- [De Bodt and Van Wassenhove, 1983] De Bodt, M. A. and Van Wassenhove, L. N. (1983). Cost increases due to demand uncertainty in MRP lot sizing. *Decision Sciences*, 14(3):345–362.
- [Dolgui, 2002] Dolgui, A. (2002). On a model of joint control of reserves in automatic control systems of production. *Automation and Remote Control*, 62:2020–2026.
- [Dolgui and Ould Louly, 2002] Dolgui, A. and Ould Louly, M. (2002). A model for supply planning under lead time uncertainty. *International Journal of Production Economics*, 78:145–152.
- [Dolgui et al., 1995] Dolgui, A., Portmann, M.-C., and Proth, J.-M. (1995). Planification de systèmes d'assemblage avec approvisionnements aléatoires en composants. *Journal of Decision Systems*, 4(4):255–278.
- [Dolgui and Prodhon, 2007] Dolgui, A. and Prodhon, C. (2007). Supply planning under uncertainties in MRP environments: A state of the art. *Annual Reviews in Control*, 31:269–279.
- [Dolgui and Proth, 2010] Dolgui, A. and Proth, J.-M. (2010). *Supply Chain Engineering : Useful Methods and Techniques*. London : Springer-Verlag London.

- [Elhafsi, 2002] Elhafsi, M. (2002). Optimal leadtimes planning in serial production systems with earliness and tardiness costs. *IIE Transactions*, 34:233–243. 10.1023/A:1012473114130.
- [Enns, 2002] Enns, S. T. (2002). MRP performance effects due to forecast bias and demand uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 138-1:87–102.
- [Fallah-Jamshidi et al., 2011] Fallah-Jamshidi, S., Karimi, N., and Zandieh, M. (2011). A hybrid multi-objective genetic algorithm for planning order release date in two-level assembly system with random lead times. *Expert Systems with Applications*, 38(11):13549 – 13554.
- [Fildes and Kingsman, 1997] Fildes, R. and Kingsman, B. (1997). *Demand uncertainty in MRP systems: The value of forecasting*. Working Paper 01/97, Department of Management Science, Lancaster University.
- [Galasso, 2007] Galasso, F. (2007). *Aide à la planification dans les chaînes logistiques en présence de demande flexible*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse.
- [Giard, 2003] Giard, V. (2003). *Gestion de la production et des flux*. Economica.
- [Giard and Sali, 2011] Giard, V. and Sali, M. (2011). Production à la commande et production pour stock dans un environnement MRP. In *Working paper, université Paris Dauphine*. CIGI 2011.
- [Goldberg and Deb, 1991] Goldberg, D. and Deb, K. (1991). *A comparative analysis of selection schemes used in genetic algorithms*, pages 69–93. Morgan Kaufmann Publishers, Inc.
- [Grabot et al., 2005] Grabot, B., Geneste, L., Reynoso-Castillo, G., and Vérot, S. (2005). Integration of uncertain and imprecise orders in the MRP method. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 16(2):215–234.
- [Grasso and Taylor, 1984] Grasso, E. and Taylor, B. (1984). A simulation-based experimental investigation of supply/timing uncertainty in MRP systems. *International Journal of Production Research*, 22(3):485–497.
- [Graves, 1988] Graves, S. C. (1988). Safety stocks in manufacturing systems. *Journal of Manufacturing and Operations Management*, 1(1):67–101.
- [Graves, 2011] Graves, S. C. (2011). Uncertainty and production planning. In Kempf, K. G., Keskinocak, P., and Uzsoy, R., editors, *Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise*, volume 151 of *International Series in Operations*



*Research & Management Science*, pages 83–101. Springer US. 10.1007/978-1-4419-6485-4\_5.

- [Grubbström and Molinder, 1996] Grubbström, R. and Molinder, A. (1996). Safety production plans in MRP-systems using transform methodology. *International Journal of Production Economics*, 46-47(0):297 – 309.
- [Guide and Srivastava, 2000] Guide, V. and Srivastava, R. (2000). A review of techniques for buffering against uncertainty with MRP systems. *Production Planning & Control*, 11(3):223–233.
- [Gupta and Brennan, 1995] Gupta, S. and Brennan, L. (1995). MRP systems under supply and process uncertainty in an integrated shop floor control environment. *International Journal of Production Research*, 33(1):205–220.
- [Gurnani et al., 1996] Gurnani, H., Akella, R., and Lehoczky, J. (1996). Optimal order policies in assembly systems with random demand and random supplier delivery. *IIE Transactions*, 28:865–878.
- [Gurnani et al., 2000] Gurnani, H., Akella, R., and Lehoczky, J. (2000). Supply management in assembly systems with random yield and random demand. *IIE Transactions*, 32:701–714. 10.1023/A:1007604710580.
- [He et al., 2005] He, X. J., Kim, J. G., and Hayya, J. C. (2005). The cost of lead-time variability: The case of the exponential distribution. *International Journal of Production Economics*, 97(2):130 – 142.
- [Hegedus and Hopp, 2000] Hegedus, M. and Hopp, W. (2000). Setting procurement safety lead times for assembly systems. *International Journal of Production Research*, 39:3459–3478.
- [Herrera and Thomas, 2009] Herrera, C. and Thomas, A. (2009). Un modèle pour limiter la nervosité et l’instabilité du Programme Directeur de Production. 8ème Congrès International de Génie Industriel (CIGI 2009).
- [Hnaïen, 2008] Hnaïen, F. (2008). *Gestion des stocks dans des chaînes logistiques face aux aléas des délais d’approvisionnements*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Saint Étienne.
- [Hnaïen et al., 2009] Hnaïen, F., Delorme, X., and Dolgui, A. (2009). Genetic algorithm for supply planning in two-level assembly systems with random lead times. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 22:906–915.

- [Hnaien et al., 2010] Hnaien, F., Delorme, X., and Dolgui, A. (2010). Multi-objective optimization for inventory control in two-level assembly systems under uncertainty of lead times. *Computers and Operations Research*, 37:1835–1843.
- [Hnaien et al., 2008] Hnaien, F., Dolgui, A., and Ould Louly, M. (2008). Planned lead time optimization in material requirement planning environment for multilevel production systems. *Journal of Systems Science and Systems Engineering*, 17(2):132–155.
- [Ho and Ireland, 1998] Ho, C.-J. and Ireland, T. (1998). MRP system nervousness and forecast errors. *International Journal of Production Research*, 36:2285–2299.
- [Ho and Lau, 1994] Ho, C.-J. and Lau, H.-S. (1994). Evaluating the impact of lead time uncertainty in material requirements planning systems. *European Journal of Operational Research*, 75(1):89–99.
- [Holland, 1975] Holland, J. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. MIT Press Cambridge, MA, USA.
- [Inderfurth, 2009] Inderfurth, K. (2009). How to protect against demand and yield risks in MRP systems. *International Journal of Production Economics*, 121(2):474 – 481.
- [Inderfurth and Transchel, 2007] Inderfurth, K. and Transchel, S. (2007). Note on myopic heuristics for the random yield problem. *Operations Research*, 55(6):1183–1186.
- [Inderfurth and Vogelgesang, 2011] Inderfurth, K. and Vogelgesang, S. (2011). Concepts for safety stock determination under stochastic demand and different types of random production yield. working paper.
- [Jeunet and Jonard, 2000] Jeunet, J. and Jonard, N. (2000). Measuring the performance of lot-sizing techniques in uncertain environments. *International Journal of Production Economics*, 64:197–208.
- [Kadipasaoglu and Sridharan, 1995] Kadipasaoglu, S. N. and Sridharan, V. (1995). Alternative approaches for reducing schedule instability in multistage manufacturing under demand uncertainty. *Journal of Operations Management*, 13(3):193 – 211.
- [Kellerer et al., 2004] Kellerer, H., Pferschy, U., and Pisinger, D. (2004). *Knapsack Problems*. Springer, Berlin, Germany.

- [Kianfar and Mokhtari, 2009] Kianfar, F. and Mokhtari, J. (2009). Lot sizing and lead time quotations in assembly systems. *Scientia Iranica, Transaction E, Industrial Engineering*, 16(2):100–113.
- [Kim et al., 2006] Kim, J. G., Chatfield, D., Harrison, T. P., and Hayya, J. C. (2006). Quantifying the bullwhip effect in a supply chain with stochastic lead time. *European Journal of Operational Research*, 173(2):617 – 636.
- [Kim et al., 2004] Kim, J. G., Sun, D., He, X. J., and Hayya, J. C. (2004). The (s, Q) inventory model with erlang lead time and deterministic demand. *Naval Research Logistics*, 51(6):906–923.
- [Koh and Saad, 2003] Koh, S. and Saad, S. (2003). MRP-controlled manufacturing environment disturbed by uncertainty. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 12(1-2):157–171.
- [Koh et al., 2002] Koh, S., Saad, S., and Jones, M. (2002). Uncertainty under MRP-planned manufacture: review and categorization. *International Journal of Production Research*, 40(10):2399–2421.
- [Kuik et al., 1994] Kuik, R., Salomon, M., and van Wassenhove, L. N. (1994). Batching decisions: structure and models. *European Journal of Operational Research*, 75(2):243 – 263. Lotsizing models for production planning.
- [Kumar, 1989] Kumar, A. (1989). Component inventory costs in an assembly problem with uncertain supplier lead-times. *IIE Transactions*, 21(2):112–121.
- [Lee and Nahmias, 1993] Lee, H. L. and Nahmias, S. (1993). Single-product, single-location models. In S.C Graves, A. R. K. and Zipkin, P., editors, *Logistics of Production and Inventory*, volume 4 of *Handbooks in Operations Research and Management Science*, pages 3 – 55. Elsevier.
- [Lee et al., 2004] Lee, H. L., Padmanabhan, V., and Whang, S. (2004). Information distortion in a supply chain: The bullwhip effect. *Management Science*, 50(12\_supplement):1875–1886.
- [Martel and Gascon, 1998] Martel, A. and Gascon, A. (1998). Dynamic lot-sizing with price changes and price-dependent holding costs. *European Journal of Operational Research*, 111(1):114 – 128.
- [Martello and Toth, 1990] Martello, S. and Toth, P. (1990). *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA.

- [Melnyk and Piper, 1981] Melnyk, S. and Piper, C. (1981). Implementation of material requirements planning: Safety lead times. *Production and inventory management journal*, 2:56–60.
- [Miller, 1979] Miller, J. (1979). *Hedging the master schedule*. Problems in manufacturing and service organizations.
- [Mohebbi, 2003] Mohebbi, E. (2003). Supply interruptions in a lost-sales inventory system with random lead time. *Computers & Operations Research*, 30(3):411 – 426.
- [Mohebbi and Choobineh, 2005] Mohebbi, E. and Choobineh, F. (2005). The impact of component commonality in an assemble-to-order environment under supply and demand uncertainty. *The International Journal of Management Science*, 33:472–482.
- [Molinder, 1997] Molinder, A. (1997). Joint optimisation of lot-sizes, safety stocks and safety lead times in an MRP system. *International Journal of Production Research*, 35:983–994.
- [Mollet et al., 2006] Mollet, H., Ballot, E., Dutreuil, J., and Fontaine, F. (2006). *Système de production et de logistique*. Ed. Hermès, Paris edition.
- [Mula et al., 2006a] Mula, J., Poler, R., and Garcia, J. (2006a). MRP with flexible constraints: A fuzzy mathematical programming approach. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(1):74 – 97.
- [Mula et al., 2007] Mula, J., Poler, R., and Garcia-Sabater, J. (2007). Material Requirement Planning with fuzzy constraints and fuzzy coefficients. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(7):783 – 793.
- [Mula et al., 2006b] Mula, J., Poler, R., Garcia-Sabater, J., and Lario, F. (2006b). Models for production planning under uncertainty: A review. *International Journal of Production Economics*, 103(1):271 – 285.
- [Namit, 2007] Namit, K. (2007). Determining reorder point in the presence of stochastic lead time and Box-Jenkins time series demand. *Journal of the Academy of Business and Economic*, 7(2):208–215.
- [Ould Louly and Dolgui, 2002] Ould Louly, M. and Dolgui, A. (2002). Generalized newsboy model to compute the optimal planned lead times in assembly systems. *International Journal of Production Research*, 40(17):4401–4414.

- [Ould Louly and Dolgui, 2003] Ould Louly, M. and Dolgui, A. (2003). A polynomial algorithm for the MPS parameterization under uncertainties. volume A manufacturing systems, Camacho, Basanez, and De La Puente (Eds.). In Proceedings of the 15th IFAC World Congress.
- [Ould Louly and Dolgui, 2004] Ould Louly, M. and Dolgui, A. (2004). The MPS parameterization under lead time uncertainty. *International Journal of Production Economics*, 90(04):369–376.
- [Ould Louly and Dolgui, 2009] Ould Louly, M. and Dolgui, A. (2009). Calculating safety stocks for assembly systems with random component procurement lead times: A branch and bound algorithm. *European Journal of Operational Research*, 199(3):723 – 731.
- [Ould Louly and Dolgui, 2012] Ould Louly, M. and Dolgui, A. (2012). A note on analytic calculation of planned lead times for assembly systems under POQ policy and service level constraint. *International Journal of Production Economics*, 140(2):778 – 781.
- [Ould Louly and Dolgui, 2013] Ould Louly, M. and Dolgui, A. (2013). Optimal MRP parameters for a single item inventory with random replenishment lead time, POQ policy and service level constraint. *International Journal of Production Economics*, 143(1):35 – 40.
- [Ould Louly et al., 2008a] Ould Louly, M., Dolgui, A., and Hnaien, F. (2008a). Optimal supply planning in MRP environments for assembly systems with random component procurement times. *International Journal of Production Research*, 46(19):5441–5467.
- [Ould Louly et al., 2008b] Ould Louly, M., Dolgui, A., and Hnaien, F. (2008b). Supply planning for single-level assembly system with stochastic component delivery times and service level constraint. *International Journal of Production Economics*, 115(1):236–247.
- [Peidro et al., 2009] Peidro, D., Mula, J., Poler, R., and Lario, F.-C. (2009). Quantitative models for supply chain planning under uncertainty: a review. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 43:400–420.
- [Perkgoz et al., 2007] Perkgoz, C., Azaron, A., Katagiri, H., Kato, K., and Sakawa, M. (2007). A multi-objective lead time control problem in multi-stage assembly systems using genetic algorithms. *European Journal of Operational Research*, 180:292–308.

- [Persona et al., 2007] Persona, A., Battini, D., Manzini, R., and Pareschi, A. (2007). Optimal safety stock levels of subassemblies and manufacturing components. *International Journal of Production Economics*, 110:147 – 159.
- [Plenert, 1999] Plenert, G. (1999). Focusing material requirements planning (MRP) towards performance. *European Journal of Operational Research*, 119(1):91 – 99.
- [Proth et al., 1997] Proth, J.-M., Mauroy, G., Wardi, Y., and Chu, C. (1997). Supply management for cost minimization in assembly systems with random component yield times. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 8(5):358–403.
- [Rossi et al., 2010] Rossi, R., Armagan Tarim, S., Hnich, B., and Prestwich, S. (2010). Computing the non-stationary replenishment cycle inventory policy under stochastic supplier lead-times. *International Journal of Production Economics*, 127(1):180 – 189.
- [Ryu and Lee, 2003] Ryu, S. and Lee, K. (2003). A stochastic inventory model of dual sourced supply chain with lead-time reduction. *International Journal of Production Economics*, 81-82:513–524.
- [Sakiani et al., 2012] Sakiani, R., Ghomi, S. F., and Zandieh, M. (2012). Multi-objective supply planning for two-level assembly systems with stochastic lead times. *Computers & Operations Research*, 39(7):1325 – 1332.
- [Silver and Meal, 1973] Silver, E. and Meal, H. (1973). A heuristic for selecting lot-size quantities for the case of a deterministic time-varying demand rate and discrete opportunities for replenishment. *Production and inventory management journal*, 14:64–74.
- [Silver and Peterson, 1985] Silver, E. and Peterson, R. (1985). *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning*.
- [Song et al., 2000] Song, J., Yano, C., and Lerssrisuriya, P. (2000). Contract assembly: Dealing with combined supply lead time and demand quantity uncertainty. *Manufacturing and Service Operations Management*, 2(3):287–296.
- [Sridharan and LaForge, 1994] Sridharan, V. and LaForge, R. (1994). A model to estimate service levels when a portion of the master production schedule is frozen. *Computers & Operations Research*, 21(5):477 – 486.
- [Tang and Grubbström, 2003] Tang, O. and Grubbström, R. (2003). The detailed coordination problem in a two-level assembly system with stochastic lead times. *International Journal of Production Economics*, 81-82:415–429.

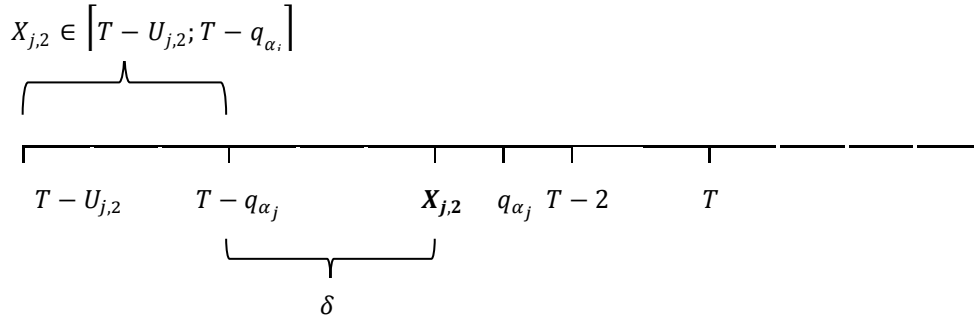
- [Thierry, 2003] Thierry, C. (2003). *Gestion de chaînes logistiques : Modèles et mise en oeuvre pour l'aide à la décision à moyen terme*. Habilitation à diriger des recherches, Toulouse Le Mirail, France.
- [Van Kampen Tim et al., 2010] Van Kampen Tim, J., Van Donk Dirk, P., and Van Der Zee, D. (2010). Safety stock or safety lead time: coping with unreliability in demand and supply. *International Journal of Production Research*, 48(23-24):7463–7481.
- [Vollmann et al., 1997] Vollmann, T. E., Berry, W. L., and Whybark, C. D. (1997). *Manufacturing Planning and Control Systems*. McGraw-Hill.
- [Wagner and Whitin, 1958] Wagner, H. M. and Whitin, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management Science*, 50(12\_supplement):1770–1774.
- [Wazed et al., 2009] Wazed, M., Shamsuddin, A., and Yusoff, N. (2009). Uncertainty factors in real manufacturing environment. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, 3(2):342–351.
- [Weeks, 1981] Weeks, J. (1981). Optimizing planned lead times and delivery dates. In *21st annual Conference Proceeding, American Production and Inventory Control Society*, pages 177–188.
- [Whybark and Williams, 1976] Whybark, D. C. and Williams, J. (1976). Material requirements planning under uncertainty. *Decision Science*, 7:595–606.
- [Yano, 1987a] Yano, C. (1987a). Planned leadtimes for serial production systems. *IIE Transactions*, 19(3):300–307.
- [Yano, 1987b] Yano, C. (1987b). Setting planned leadtimes in serial production systems with tardiness costs. *Management Science*, 33(1):95–106.
- [Yano, 1987c] Yano, C. (1987c). Stochastic leadtimes in two-level assembly systems. *IIE Transactions*, 19(4):371–378.
- [Zhao and Lam, 1997] Zhao, R. and Lam, K. (1997). Lot-sizing rules and freezing the master production schedule in material requirements planning systems. *International Journal of Production Economics*, 53(3):281 – 305.
- [Zipkin, 2000] Zipkin, P. (2000). *Foundations of Inventory Management*. McGraw-Hill, USA.

## Annexes

### Propriété A.1 :

Soient  $X_{j,2} \notin ]T - q_{\alpha_j}; T - 2]$  et  $\delta = X_{j,2} - (T - q_{\alpha_j})$  (voir **Figure A. 1**). Si  $X_{j,2} > T - q_{\alpha_j}$  alors :

$$\sum_{T \leq s < T + \delta} \left( Pr[\psi_j > s] - \frac{r}{b+r} \right) \geq 0$$



**Figure A. 1 :** Détermination de  $\delta$  et de l'intervalle de  $X_{j,2}$

### Démonstration A.1:

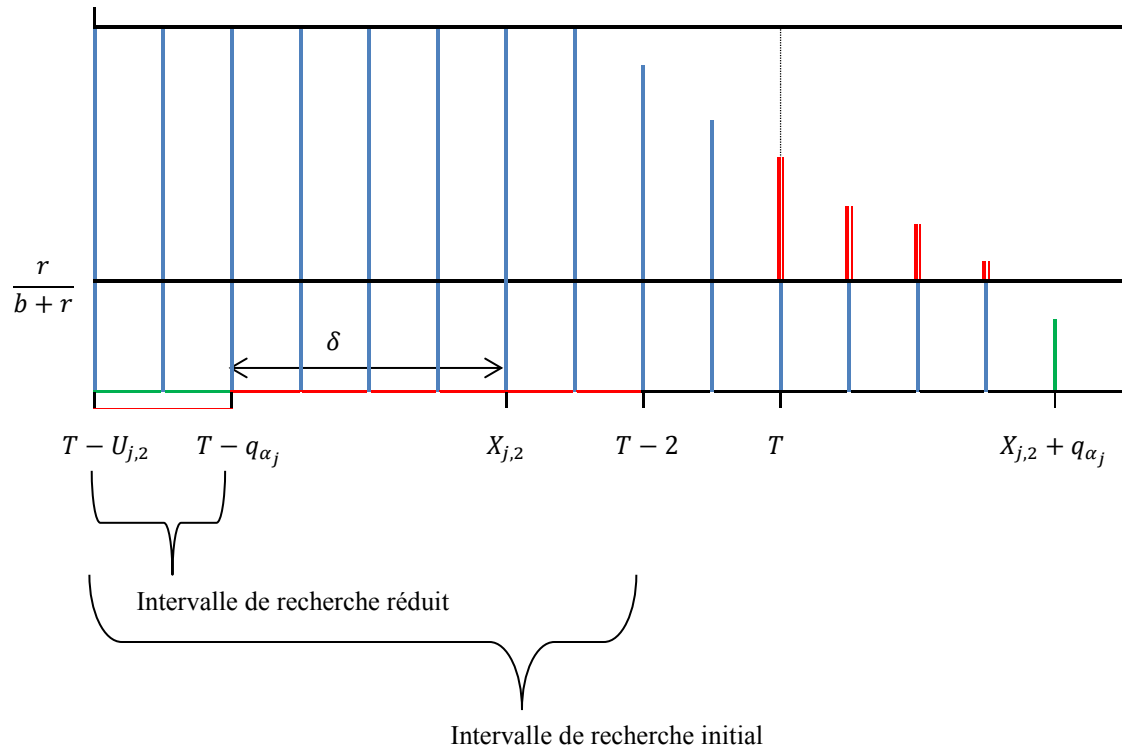
Dans la **Figure A. 2** où  $X_{j,2} \notin [T - U_{i,2}; T - q_{\alpha_j}]$ , les bâtons en bleus correspondent à  $Pr[\psi_j > s]$  et les bâtons en rouge (entre  $T$  et  $X_{j,2} + q_{\alpha_j}$ ) correspondent  $Pr[\psi_j > s] - \frac{r}{b+r}$ .

Or :



$$\sum_{T \leq s < T+\delta} (Pr[\psi_j > s]) = \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} [Pr[L_{i,1} = o_1] \times Pr[L_{j,2} > -X_{j,2} + o_2]] \right)$$

$$Pr[\psi_j > s]$$



**Figure A. 2 :** la valeur de  $Pr[\psi_j > s]$  sur l'intervalle de temps

Nous avons posé  $\delta = X_{j,2} - T + q_{\alpha_j}$ , alors :

$$\begin{aligned}
& \sum_{T \leq s < T+\delta} (Pr[\psi_j > s]) \\
&= \sum_{T \leq s < T+X_{j,2}-T+q_{\alpha_j}} \left( \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} [P[\llbracket L_{i,1} = o_1 \rrbracket] \times P[\llbracket L_{j,2} > -X_{j,2} + o_2 \rrbracket]] \right) \\
&= \sum_{T \leq s < X_{j,2}+q_{\alpha_j}} \left( \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} [P[\llbracket L_{i,1} = o_1 \rrbracket] \times P[\llbracket L_{j,2} > -X_{j,2} + o_2 \rrbracket]] \right) \\
&= \sum_{T-X_{j,2} \leq s < X_{j,2}+q_{\alpha_j}-X_{j,2}} \left( \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} [P[\llbracket L_{i,1} = o_1 \rrbracket] \times P[\llbracket L_{j,2} > o_2 \rrbracket]] \right) \\
& \sum_{T \leq s < T+\delta} (Pr[\psi_j > s]) = \sum_{T-X_{j,2} \leq s < q_{\alpha_j}} \left( \sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} [Pr[\llbracket L_{i,1} = o_1 \rrbracket] \times Pr[\llbracket L_{j,2} > o_2 \rrbracket]] \right) \\
&= \sum_{T-X_{j,2} \leq s < q_{\alpha_j}} Pr[\llbracket L_{i,1} + L_{j,2} > s \rrbracket]
\end{aligned}$$

D'après l'expressions (3.15),  $\forall s < q_{\alpha_j}$ :

$$\sum_{\substack{o_1+o_2=s \\ o_1+o_2 \in \mathbb{Z}}} (Pr[\llbracket L_{i,1} = o_1 \rrbracket] \times Pr[\llbracket L_{j,2} > o_2 \rrbracket]) \geq \frac{r}{b+r}$$

Donc:

$$\sum_{T-X_{j,2} \leq s < q_{\alpha_j}} \left( Pr[\llbracket L_{i,1} + L_{j,2} > s \rrbracket] - \frac{r}{b+r} \right) \geq 0$$

C.Q.F.D

**Démonstration A.2**

$$\begin{aligned}
\varepsilon(X^*, A^*) = & \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} E \left[ \left[ M_{PF\{X^*\}} \right] \right] - \sum_{i=1}^{N_1} H_i E \left[ \left[ M_{i,1\{X^*\}} \right] \right] - \sum_{l=1}^2 \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E \left[ \left[ L_{i,l} \right] \right] \right) \\
& - \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} X_{i,2} + b \times \left( E \left[ \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] \right] - T \right) + r \times \left( T - E \left[ \left[ M_{PF\{X^*\}}^- \right] \right] \right) \\
& - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} E \left[ \left[ M_{PF\{A^*\}} \right] \right] + \sum_{i=1}^{N_1} H_i E \left[ \left[ M_{i,1\{A^*\}} \right] \right] + \sum_{l=1}^2 \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E \left[ \left[ L_{i,l} \right] \right] \right) \\
& + \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} A_{i,2} \\
& - b \times \left( E \left[ \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right] - T \right) - r \times \left( T - E \left[ \left[ M_{PF\{A^*\}}^- \right] \right] \right)
\end{aligned}$$

Sachant que:

- $M_{i,1\{A^*\}} = \max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (L_{k,2} + X_{k,2}^* - \delta) = \max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (L_{k,2} + X_{k,2}^*) - \delta = M_{i,1\{X^*\}} - \delta$
- $M_{PF\{A^*\}}^+ = \max(M_{PF\{A^*\}}, T) = \max(M_{PF\{X_{k,2}^* - \delta\}}, T)$
- $M_{PF\{A^*\}}^- = \min(M_{PF\{A^*\}}, T) = \min(M_{PF\{X_{k,2}^* - \delta\}}, T)$
- $M_{PF\{A^*\}} = \max_{i=1, \dots, N_1} (M_{i,1\{A^*\}} + L_{i,1}) = \max_{i=1, \dots, N_1} (M_{i,1\{X^*\}} + L_{i,1} - \delta) = M_{PF\{X^*\}} - \delta$

Alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(X^*, A^*) &= \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} E \llbracket M_{PF\{X^*\}} \rrbracket - \sum_{i=1}^{N_1} H_i E \llbracket M_{i,1\{X^*\}} \rrbracket - \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} X_{i,2} \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} (E \llbracket M_{PF\{X^*\}} \rrbracket - \delta) + \sum_{i=1}^{N_1} H_i E \llbracket M_{i,1\{X^*\}} - \delta \rrbracket + \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} (X_{i,2} - \delta) \\
&\quad + b \times (E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^+ \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^+ \rrbracket) + r \times (E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^- \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^- \rrbracket) \\
\varepsilon(X^*, A^*) &= - \sum_{i=1}^{N_1} H_i E \llbracket M_{i,1\{X^*\}} \rrbracket + \delta \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} + \sum_{i=1}^{N_1} H_i E \llbracket M_{i,1\{X^*\}} - \delta \rrbracket - \delta \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} \\
&\quad + b \times (E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^+ \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^+ \rrbracket) + r \times (E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^- \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^- \rrbracket) \\
\varepsilon(X^*, A^*) &= \delta \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} - \delta \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} + \delta \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} - \delta \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} \\
&\quad + b \times (E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^+ \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^+ \rrbracket) + r \times (E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^- \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^- \rrbracket) \\
\varepsilon(X^*, A^*) &= b \times (E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^+ \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^+ \rrbracket) + r \times (E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^- \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^- \rrbracket) \\
&\quad - \delta \left[ \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} - \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2} \right]
\end{aligned}$$

Or la somme des composants  $c_{k,2} \in S_{i,1}$  nécessaires à l'assemblage de tous les composants  $c_{i,1}$  est égale à  $N_2$  qui est le nombre total de composants au 2<sup>ème</sup> niveau de la nomenclature, donc :

$$\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} = \sum_{i=1}^{N_2} h_{i,2}$$

Ainsi:

$$\varepsilon(X^*, A^*) = b \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] - E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) + r \times \left( E \left[ M_{PF\{A^*\}}^- \right] - E \left[ M_{PF\{X^*\}}^- \right] \right) \quad (\text{A.1})$$

Or d'après l'équation (3.11) nous avons:

- $E \left[ M_{PF\{X^*\}}^- \right] = E \left[ M_{PF\{X^*\}} \right] - E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] + T$
- $E \left[ M_{PF\{X^*\}}^- \right] = E \left[ M_{PF\{A^*\}} \right] - E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] + T$

Donc:

$$\begin{aligned} \varepsilon(X^*, A^*) &= b \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] - E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) - r \\ &\quad \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}} \right] - E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] + T - E \left[ M_{PF\{A^*\}} \right] + E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] - T \right) \\ &= b \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] - E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) - r \\ &\quad \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}} \right] - E \left[ M_{PF\{A^*\}} \right] - E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] + E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) \\ &= b \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] - E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) - r \\ &\quad \times \left( \delta - E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] + E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) \\ &= b \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] - E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) + r \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] + E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) \\ &\quad - \delta r = (b + r) \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] - E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) - \delta r \end{aligned}$$

Soit  $S_{sup} = T + 2 \times (u - 1)$ ,  $s \leq S_{sup}$ , et  $Q = b + r$ . D'après (3.12):

$$\begin{aligned}
\varepsilon(X^*, A^*) &= Q \times \left( T + \sum_{T \leq s \leq S_{sup}} \left( 1 - Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) - T \right. \\
&\quad \left. - \sum_{T \leq s \leq S_{sup}} \left( 1 - Pr \left[ M_{FP\{A^*\}} \leq s \right] \right) \right) - \delta r \\
&= Q \times \left( \sum_{T \leq s \leq S_{sup}} \left( Pr \left[ M_{FP\{A^*\}} \leq s \right] - Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) \right) - \delta r \\
&= Q \times \left( \sum_{T \leq s \leq S_{sup}} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} - \delta \leq s \right] - Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) \right) - \delta r \\
&= Q \times \left( \sum_{T \leq s \leq S_{sup}} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s + \delta \right] - Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) \right) - \delta r \\
&= Q \times \left( \sum_{T + \delta \leq s \leq S_{sup} + \delta} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) - \sum_{T \leq s \leq S_{sup}} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) \right) \\
&\quad - \delta r \\
&= Q \times \left( \sum_{T + \delta \leq s \leq S_{sup}} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) + \sum_{S_{sup} < s \leq S_{sup} + \delta} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{T \leq s < T + \delta} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) - \sum_{T + \delta \leq s \leq S_{sup}} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) \right) - \delta r \\
&= Q \times \left( \sum_{S_{sup} < s \leq S_{sup} + \delta} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) - \sum_{T \leq s < T + \delta} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] \right) \right) - \delta r
\end{aligned}$$

Pour  $s > S_{sup}$ ,  $Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} \leq s \right] = 0$ , donc:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(A^*, X^*) &= Q \times \left( \delta - \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( \Pr \llbracket M_{FP\{X^*\}} \leq s \rrbracket \right) \right) - \delta r \\
&= b \times \left( \delta - \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( \Pr \llbracket M_{FP\{X^*\}} \leq s \rrbracket \right) \right) + r \\
&\times \left( \delta - \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( \Pr \llbracket M_{FP\{X^*\}} \leq s \rrbracket \right) \right) - \delta \\
&= b\delta - b \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( \Pr \llbracket M_{FP\{X^*\}} \leq s \rrbracket \right) - r \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( \Pr \llbracket M_{FP\{X^*\}} \leq s \rrbracket \right) \\
&= b\delta - \left( Q \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( \Pr \llbracket M_{FP\{X^*\}} \leq s \rrbracket \right) \right) \\
&= Q \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( \Pr \llbracket M_{FP\{X^*\}} > s \rrbracket - \frac{r}{b+r} \right)
\end{aligned}$$

Or  $\forall s, M_{FP\{X^*\}} > \psi_j$ , alors :

$$\Pr \llbracket M_{FP\{X^*\}} > s \rrbracket \geq \Pr \llbracket \psi_j > s \rrbracket$$

D'où :

$$\varepsilon(A^*, X^*) \geq Q \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( \Pr \llbracket \psi_j > s \rrbracket - \frac{r}{b+r} \right)$$

D'après la propriété (A.1) qui est détaillée dans cette annexe :

$$\forall T \leq s < T + \delta, \quad \Pr \llbracket \psi_j > s \rrbracket \geq \frac{r}{b+r}$$

D'où  $\varepsilon(A^*, X^*) \geq 0$ .

C.Q.F.D.

### **Démonstration A.3**

Soit  $\varepsilon = E_b + E_1 + E_2$  la différence entre  $E[C(A_{N_2}, L)]$  et  $BI(A_{k'})$ .

D'après l'expression (3.3), l'espérance mathématique  $E[C_{bPF}]$  du coût de rupture en produit fini est égale à:

$$E[C_{bPF}] = b \left( E \left[ M^+_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - T \right)$$

Soit  $E_b$  la différence entre:

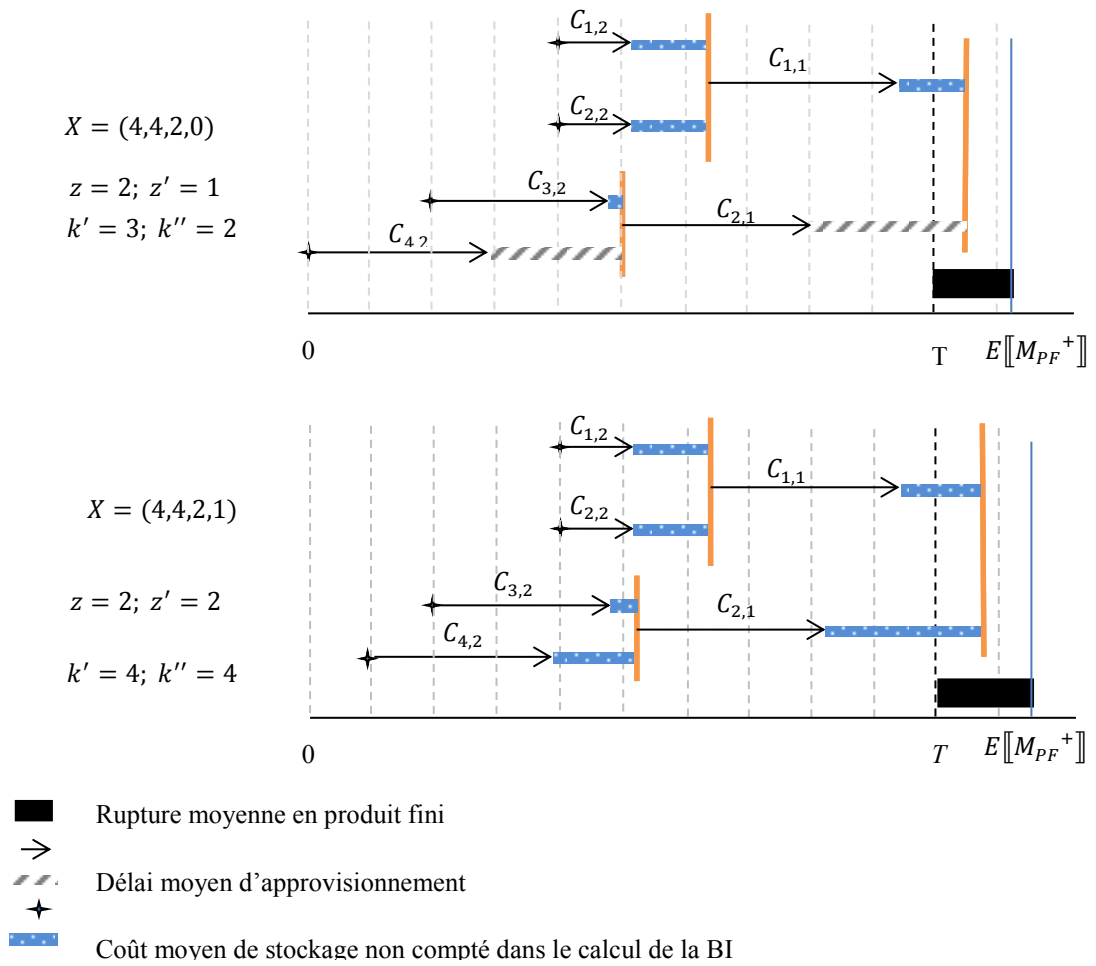
- L'espérance mathématique  $E[C_{bPF}, A_{N_2}]$  du coût de rupture en produit fini associée au vecteur  $A_{N_2}$ .
- L'espérance mathématique  $E[C_{bPF}, A_{k'}]$  du coût de rupture en produit fini associée au vecteur  $A_{k'}$ .

Ainsi, nous pouvons déterminer la valeur exacte de  $E_b$ :

$$E_b = b \left( E \left[ M^+_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E \left[ M^+_{\forall k > k'_2; X_{k,2} = a_{k,2}}^{PF} \right] \right)$$

$$= b \left( \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right) \right) \right) \right. \\ \left. - \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left[ 1 - \left( \prod_{i=1}^{k'} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right) \right) \right) \times \prod_{i=k'+1}^{N_1} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-a_{k,2} + o_2) \right) \right) \right] \right] \right)$$





**Figure A. 3 :** Exemple de calcul de borne inférieure

$$\begin{aligned}
&= b \left( \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left( \left( \prod_{i=1}^{k'} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right) \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \times \left. \prod_{i=k'+1}^{N_1} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-a_{k,2} + o_2) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \prod_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right) \right) \right) \right) \\
&= b \left( \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left( \left( \prod_{i=1}^{k'} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right) \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \times \left. \prod_{i=k'+1}^{N_1} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-a_{k,2} + o_2) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \prod_{i=1}^{k'} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \times \prod_{i=k'+1}^{N_1} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right) \right) \right) \\
&= b \left( \sum_{0 \leq s \leq T-1} \left( \left( \prod_{i=1}^{k'} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right) \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \times \left. \left[ \prod_{i=k'+1}^{N_1} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-a_{k,2} + o_2) \right) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \prod_{i=k'+1}^{N_1} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \left( \Pr[L_{i,1} = o_1] \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \right) \right) \right] \right) \right)
\end{aligned}$$

Nous avons bien  $E_b \geq 0$  étant donné que pour tout  $X_{k,2} \in [T - U_{k,2}, T - 2]$  :

$$\prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-a_{k,2} + o_2) - \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(-X_{k,2} + o_2) \geq 0$$

Nous notons aussi que :

$$E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^+ \right]_{PF} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_2; X_{k,2} = a_{k,2}}^+ \right]_{PF} \right] \geq 0 \quad (\text{A.2})$$

D'après l'expression (3.2), l'espérance du coût de stockage des composants  $c_{i,2}$  au deuxième niveau de la nomenclature est égale à :

$$E[C_{sc_2}, A_{N_2}] = \sum_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}} \right]_{i,1} \right] - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \right)$$

Avec  $M_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{i,1}$  la date d'assemblage du composant  $c_{i,1}$  et les dates de lancement d'ordres aux fournisseurs  $X_{k,2}$  sont fixes et appartiennent à  $[a_{k,2}; b_{k,2}]$ .

Soit  $E_2$  la différence entre :

- L'espérance  $E[C_{sc_2}, A_{N_2}]$  du coût de stockage des composants  $c_{i,2}$ , avec  $A_{N_2}$  le vecteur des dates de lancement des ordres aux fournisseurs afin de s'approvisionner en composants  $c_{i,2}$ .
- L'espérance  $E[C_{sc_2}, A_{k'}]$  du coût de stockage des  $k'$  premiers composants  $c_{i,2}$  du dernier niveau 2 dont le vecteur des dates de lancements des ordres aux fournisseurs est  $A_{k'}$ .

Nous notons que pour un vecteur  $A_{k'} = (X_{1,2}, \dots, X_{k',2}, a_{k'+1,2}, \dots, a_{N_2,2})$ , les  $k^{er}$  composants ont des dates de lancement d'ordres aux fournisseurs  $a_{k,2}$  supérieures ou égales à  $a_{k,2}$ . Celles des  $(N_2 - k')$  composants restants sont égales à  $a_{k,2}$ .

$$E_2 = \sum_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{i,1} \right] - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^Z \left( \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{i,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( E \left[ M_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}}^{i,1} \right] - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \right) \right)$$

Posons  $E_2 = \sum_{i=1}^2 E_{i2}$  avec :

- $E_{12}$  correspond à la somme des coûts de stockages de tous les composants du niveau 2 de la nomenclature:

$$E_{12} = \sum_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \right)$$

- $E_{22}$  correspond à la somme des coûts de stockages des  $k'$  premiers composants du deuxième niveau :

$$E_{22} = - \sum_{i=1}^Z \left( \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{i,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \right)$$

Nous pouvons ainsi calculer la valeur de  $E_2$  :

$$E_2 = \sum_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E\llbracket L_{k,2} \rrbracket - X_{k,2} \right) \right) \\ - \sum_{i=1}^z \left( \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{i,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E\llbracket L_{k,2} \rrbracket - X_{k,2} \right) \right)$$

$$E_2 = \sum_{i=1}^{z-1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E\llbracket L_{k,2} \rrbracket - X_{k,2} \right) \right) \\ + \sum_{i=z+1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E\llbracket L_{k,2} \rrbracket - X_{k,2} \right) \right) \\ + \sum_{c_{k,2} \in S_{z,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{z,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E\llbracket L_{k,2} \rrbracket - X_{k,2} \right) \\ - \sum_{i=1}^{z-1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E\llbracket L_{k,2} \rrbracket - X_{k,2} \right) \right) \\ - \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{z,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E\llbracket L_{k,2} \rrbracket - X_{k,2} \right)$$

$$E_2 = \sum_{i=z+1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E\llbracket L_{k,2} \rrbracket - X_{k,2} \right) \right) \\ + \sum_{c_{k,2} \in S_{z,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{z,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E\llbracket L_{k,2} \rrbracket - X_{k,2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{z,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \\
E_2 = & \sum_{i=z+1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \right) \\
& + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{z,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) \right) \\
& + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k > k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{z,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[L_{k,2} + X_{k,2}] \right) \\
& - \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{z,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) \right) \\
E_2 = & \sum_{i=z+1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \right) \\
& + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k > k'}} h_{k,2} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[L_{k,2}] - X_{k,2} \right) \right) \\
& + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r \leq k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \times \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) \right) \\
& - \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r \leq k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \times \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-a_{r,2} + s) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \sum_{i=z+1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[\llbracket L_{k,2} \rrbracket] - X_{k,2} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k > k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[\llbracket L_{k,2} \rrbracket] - X_{k,2} \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r \leq k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \times \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) \right. \\
&\quad \left. - 1 + \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r \leq k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \times \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-a_{r,2} + s) \right) \right) \\
E_2 &= \sum_{i=z+1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[\llbracket L_{k,2} \rrbracket] - X_{k,2} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k > k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[\llbracket L_{k,2} \rrbracket] - X_{k,2} \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( + \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r \leq k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \times \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-a_{r,2} + s) \right) \right. \\
&\quad \left. - \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r \leq k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \times \prod_{\substack{c_{r,2} \in S_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) \right) \\
E_2 &= \sum_{i=z+1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in S_{i,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[\llbracket L_{k,2} + X_{k,2} \rrbracket] \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{c_{k,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ k > k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{z,1}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) - E[\llbracket L_{k,2} \rrbracket] - X_{k,2} \right) \\
& + \sum_{\substack{c_{k,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( \prod_{\substack{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ r \leq k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \times \left( \prod_{\substack{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-a_{r,2} + s) - \prod_{\substack{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) \right) \right) \\
E_2 = & \left( \sum_{\substack{c_{k,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ k > k', i=z}} h_{k,2} + \sum_{i=z+1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in \mathcal{S}_{i,1}} h_{k,2} \right) \right) \times \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{i,1}} F_{r,2}(-a_{r,2} + s) \right) \right. \\
& \left. - E[\llbracket L_{k,2} \rrbracket] - a_{k,2} \right) \\
& + \sum_{\substack{c_{k,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ k \leq k'}} h_{k,2} \left( \sum_{s \geq 0} \left( \prod_{\substack{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ r \leq k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \times \left( \prod_{\substack{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-a_{r,2} + s) - \prod_{\substack{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

Étant donné que  $\forall X_{r,2} \in [T - U_{r,2}, T - 2]$  :

$$\prod_{\substack{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-a_{r,2} + s) - \prod_{\substack{c_{r,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ r > k'}} F_{r,2}(-X_{r,2} + s) \geq 0$$

Par conséquent  $E_2 \geq 0$ .

D'après l'expression (3.5), l'espérance du coût de stockage des composants  $c_{i,1}$  au premier niveau de la nomenclature est égale à :

$$E[\llbracket C_{SC_1}, A_{N_2} \rrbracket] = \sum_{i=1}^{N_1} \left( h_{i,1} \left( E \left[ \mathbb{M}_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E[\llbracket M_{i,1} \rrbracket] - E[\llbracket L_{i,1} \rrbracket] \right) \right)$$



Avec  $M_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF}$  la date d'assemblage du produit fini et les dates de lancement d'ordres aux fournisseurs  $a_{k,2}$  sont fixes et appartiennent à  $[a_{k,2}; b_{k,2}]$ .

Soit  $E_3$  la différence entre:

- L'espérance  $E[C_{sc_1}, A_{N_2}]$  du coût de stockage des composants  $c_{i,1}$ , avec  $A_{N_2}$  le vecteur des dates de lancement des ordres aux fournisseurs afin de s'approvisionner en composants  $c_{i,2}$ .
- L'espérance  $E[C_{sc_1}, A_{k'}]$  du coût de stockage des  $z'$  premiers composants  $c_{i,1}$  du premier niveau dont le vecteur des dates de lancements des ordres aux fournisseurs est  $A_{k'}$ .

Nous notons que pour un vecteur  $A_{k'} = (X_{1,2}, \dots, X_{k',2}, a_{k'+1,2}, \dots, a_{N_2,2})$ , les  $k^{er}$  composants ont des dates de lancement d'ordres aux fournisseurs  $a_{k,2}$  supérieures ou égales à  $a_{k,2}$ . Celles des  $(N_2 - k')$  composants restants sont égales à  $a_{k,2}$ .

$$\begin{aligned}
 E_3 &= \sum_{i=1}^{N_1} \left( h_{i,1} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E[M_{i,1}] - E[L_{i,1}] \right) \right) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ M_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}}^{PF} \right] - E[M_{i,1}] - E[L_{i,1}] \right) \right) \\
 E_3 &= \sum_{i=1+z'}^{N_1} \left( h_{i,1} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E[M_{i,1}] - E[L_{i,1}] \right) \right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E[M_{i,1}] - E[L_{i,1}] \right) \right) \\
 &\quad - \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ M_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}}^{PF} \right] - E[M_{i,1}] - E[L_{i,1}] \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_3 &= \sum_{i=1+z'}^{N_1} \left( h_{i,1} \left( E \left[ \mathbb{M}_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E \left[ M_{i,1} \right] - E \left[ L_{i,1} \right] \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( \begin{aligned} &E \left[ \mathbb{M}_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E \left[ M_{i,1} \right] - E \left[ L_{i,1} \right] \\ &- E \left[ \mathbb{M}_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}}^{PF} \right] + E \left[ M_{i,1} \right] + E \left[ L_{i,1} \right] \end{aligned} \right) \right) \\
E_3 &= \sum_{i=1+z'}^{N_1} \left( h_{i,1} \left( E \left[ \mathbb{M}_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E \left[ M_{i,1} \right] - E \left[ L_{i,1} \right] \right) \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ \mathbb{M}_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E \left[ \mathbb{M}_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}}^{PF} \right] \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Soit } \mu = E \left[ \mathbb{M}_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{PF} \right] - E \left[ \mathbb{M}_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}}^{PF} \right]$$

On sait que  $E \llbracket M_{PF} \rrbracket = E \llbracket M_{PF}^+ \rrbracket + E \llbracket M_{PF}^- \rrbracket - T$ . Donc  $\mu = \beta(A_{N_2}, A_{k'}) + \gamma(A_{N_2}, A_{k'})$  avec:

$$\begin{aligned}
\bullet \beta(A_{N_2}, A_{k'}) &= E \left[ \mathbb{M}_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{+PF} \right] - E \left[ \mathbb{M}_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}}^{+PF} \right] \\
\bullet \gamma(A_{N_2}, A_{k'}) &= E \left[ \mathbb{M}_{\forall k; X_{k,2} \geq a_{k,2}}^{-PF} \right] - E \left[ \mathbb{M}_{\forall k > k'; X_{k,2} = a_{k,2}}^{-PF} \right]
\end{aligned}$$

L'inégalité  $\beta(A_{N_2}, A_{k'}) \geq 0$  a été déjà démontrée dans l'expression (A.2).  $\gamma(A_{N_2}, A_{k'}) \geq 0$  Peut-être démontrée de la même manière.

De la même façon que dans la démonstration de  $E_b$ ,  $E_1$  peut-être aussi calculée. Alors nous avons bien  $E[C(A_{N_2}, L)] - BI(A_{k'}) \geq 0$ .

C.Q.F.D.

#### Démonstration A.4

##### Premier cas :

Soient deux nœuds  $A_{k', X_{k', 2}}$  du  $k'$ ème niveau de l'arborescence (dont le vecteur lié est défini comme suit :  $A_{k', X_{k', 2}} = (X_{1,2}, \dots, X_{k', 2}, a_{k'+1,2}, \dots, a_{N_2,2})$ ) et  $A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}$  du  $\vartheta'$ ème ( $= (k' + 1)$ ème) niveau de l'arborescence (le vecteur lié est défini sous la forme:  $A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} = (X_{1,2}, \dots, X_{k', 2}, X_{\vartheta', 2}, a_{\vartheta'+1,2}, \dots, a_{N_2,2})$ ).

Dans ce premier cas, Si les deux fils ont le même parent et ne sont pas les derniers des fils (comme dans le cas de  $c_{5,2}$  et  $c_{6,2}$  dans la figure 3.10),  $BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}})$  est calculée en fonction de  $BI(A_{k', X_{k', 2}})$  et  $\alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}})$  :

$$\begin{aligned}
 BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) E \left[ \left[ M_{PF}^+ \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] \right] + \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ \left[ M_{PF}^- \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] \right] \right) \right) \\
 &+ \left( \sum_{i=1}^{z'} \left( \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{i,1} \\ k \leq k''}} h_{k,2} \right) - h_{i,1} \right) E[M_{i,1}] + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k'' < k \leq \vartheta'}} h_{k,2} E[M_{z,1}] \\
 &- \sum_{i=1}^{\vartheta'} (h_{i,2} E[L_{i,2}]) - \sum_{i=1}^{z'} (h_{i,1} E[L_{i,1}]) - \sum_{i=1}^{\vartheta'} (h_{i,2} X_{i,2}) - T \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) E \left[ \left[ M_{PF}^+ \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] \right] + \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ \left[ M_{PF}^- \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] \right] \right) \right) \\
&+ \left( \sum_{i=1}^{z'} \left( \sum_{\substack{c_{k,2} \in \mathcal{S}_{i,1} \\ k \leq k''}} h_{k,2} \right) - h_{i,1} \right) E \llbracket M_{i,1} \rrbracket + \sum_{\substack{c_{k,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ k'' < k \leq \vartheta'}} h_{k,2} E \llbracket M_{z,1} \rrbracket \\
&- \sum_{i=1}^{k'} (h_{i,2} E \llbracket L_{i,2} \rrbracket) - h_{\vartheta', 2} E \llbracket L_{\vartheta', 2} \rrbracket - \sum_{i=1}^{z'} (h_{i,1} E \llbracket L_{i,1} \rrbracket) - \sum_{i=1}^{k'} (h_{i,2} X_{i,2}) \\
&- h_{\vartheta', 1} X_{\vartheta', 1} - T \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= BI(A_{k'}) + \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) E \left[ \left[ M_{PF}^+ \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ \left[ M_{PF}^- \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] \right] \right) \right) - \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) E \left[ \left[ M_{PF}^+ \{A_{k'}\} \right] \right] \\
&- \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ \left[ M_{PF}^- \{A_{k'}\} \right] \right] \right) \right) - \sum_{\substack{c_{k,2} \in \mathcal{S}_{z,1} \\ k'' < k \leq k'}} h_{k,2} E \llbracket M_{z,1} \rrbracket - h_{\vartheta', 2} E \llbracket L_{\vartheta', 2} \rrbracket \\
&- h_{\vartheta', 2} X_{\vartheta', 2}
\end{aligned}$$

$$BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) = BI(A_{k', X_{k', 2}}) + \alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) \left( E \left[ \left\| M_{PF}^+ \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF}^+ \left\{ A_{k', X_{k', 2}} \right\} \right\| \right] \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{z'} \left( h_{i,1} \left( E \left[ \left\| M_{PF}^- \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF}^- \left\{ A_{k', X_{k', 2}} \right\} \right\| \right] \right) \right) \\
&\quad - \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k'' < k \leq k'}} h_{k,2} E[M_{z,1}] + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{y,1} \\ k'' < k \leq \vartheta'}} h_{k,2} E[M_{y,1}] - h_{\vartheta', 2} (E[L_{\vartheta', 2}] + X_{\vartheta', 2})
\end{aligned}$$

Deuxième cas :

La seule différence dans le calcul de  $\alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}})$  dans ce deuxième cas (voir l'exemple dans la figure 3.10), c'est que le composant  $c_{7,2}$  est le dernier composant nécessaire à l'assemblage de  $c_{3,1}$ . Nous avons besoin de calculer le coût de stockage des  $y(=3)$  premiers composants de type  $c_{i,1}$ .

$$\begin{aligned}
BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{y'} h_{i,1} + b \right) E \left[ \left\| M_{PF}^+ \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] + \sum_{i=1}^{y'} h_{i,1} E \left[ \left\| M_{PF}^- \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] \\
&\quad + \left( \sum_{i=1}^{y'} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \right) - h_{i,1} \right) E[M_{i,1}] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\vartheta'} (h_{i,2} E[L_{i,2}]) - \sum_{i=1}^{y'} (h_{i,1} E[L_{i,1}]) - \sum_{i=1}^{\vartheta'} (h_{i,2} X_{i,2}) - T \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{y'} h_{i,1} + b \right) E \left[ \left\| M_{PF}^+ \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] + \sum_{i=1}^{y'} h_{i,1} E \left[ \left\| M_{PF}^- \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] \\
&+ \left( \sum_{i=1}^{z'} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \right) - h_{i,1} \right) E \llbracket M_{i,1} \rrbracket \\
&+ \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{y',1}} h_{k,2} - h_{y',1} \right) E \llbracket M_{y',1} \rrbracket - \sum_{i=1}^{k'} (h_{i,2} E \llbracket L_{i,2} \rrbracket) - h_{\vartheta',2} E \llbracket L_{\vartheta',2} \rrbracket \\
&- \sum_{i=1}^{z'} (h_{i,1} E \llbracket L_{i,1} \rrbracket) - h_{y',1} E \llbracket L_{y',1} \rrbracket - \sum_{i=1}^{k'} (h_{i,2} X_{i,2}) - h_{\vartheta',2} X_{\vartheta',2} \\
&- T \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right)
\end{aligned}$$

$$BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) = BI(A_{k', X_{k', 2}}) + \alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned}
\alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{y'} h_{i,1} + b \right) E \left[ \left\| M_{PF}^+ \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] - \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) E \left[ \left\| M_{PF}^+ \left\{ A_{k', X_{k', 2}} \right\} \right\| \right] \\
&+ \sum_{i=1}^{y'} h_{i,1} E \left[ \left\| M_{PF}^- \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] - \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} E \left[ \left\| M_{PF}^- \left\{ A_{k', X_{k', 2}} \right\} \right\| \right] \\
&+ \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{y',1}} h_{k,2} - h_{y',1} \right) E \llbracket M_{y',1} \rrbracket - h_{\vartheta',2} E \llbracket L_{\vartheta',2} \rrbracket - h_{\vartheta',2} X_{\vartheta',2} \\
&- h_{y',1} E \llbracket L_{y',1} \rrbracket - \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{z,1} \\ k'' < k \leq k'}} h_{k,2} E \llbracket M_{z,1} \rrbracket
\end{aligned}$$

Troisième cas :

La seule différence dans le calcul de  $\alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}})$  dans ce troisième cas ( $\alpha(A_{8, X_{8, 2}})$  dans l'exemple dans la figure 3.11), c'est que le composant  $c_{\vartheta', 2}$  ( $c_{8, 2}$  dans le même exemple) est le premier composant nécessaire à l'assemblage de  $c_{y', 1}$  ( $c_{4, 1}$  dans le même exemple). Nous avons besoin, comme dans le cas précédent, de calculer le coût de stockage des  $y(= 3)$  premiers composants de type  $c_{i, 1}$  :

$$\begin{aligned}
BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) E \left[ M_{PF}^+ \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] + \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} E \left[ M_{PF}^- \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] \\
&\quad + \left( \sum_{i=1}^{z'} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \right) - h_{i,1} \right) E[M_{i,1}] + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{y,1} \\ v'' < k \leq v'}} h_{k,2} E[M_{z,1}] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{\vartheta'} (h_{i,2} E[L_{i,2}]) - \sum_{i=1}^{z'} (h_{i,1} E[L_{i,1}]) - \sum_{i=1}^{\vartheta'} (h_{i,2} X_{i,2}) - T \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) \\
BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) E \left[ M_{PF}^+ \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] + \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} E \left[ M_{PF}^- \{A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}\} \right] \\
&\quad + \left( \sum_{i=1}^{z'} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \right) - h_{i,1} \right) E[M_{i,1}] + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{y,1} \\ v'' < k \leq v'}} h_{k,2} E[M_{y,1}] \\
&\quad - \sum_{i=1}^{k'} (h_{i,2} E[L_{i,2}]) - h_{\vartheta', 2} E[L_{\vartheta', 2}] - \sum_{i=1}^{z'} (h_{i,1} E[L_{i,1}]) - \sum_{i=1}^{k'} (h_{i,2} X_{i,2}) \\
&\quad - h_{\vartheta', 2} X_{\vartheta', 2} - T \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right)
\end{aligned}$$

Finalement, nous avons bien  $BI(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) = BI(A_{k', X_{k', 2}}) + \alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}})$  avec :

$$\begin{aligned}
\alpha(A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}}) &= \left( \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} + b \right) \left( E \left[ \left\| M_{PF}^+ \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF}^+ \left\{ A_{k', X_{k', 2}} \right\} \right\| \right] \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{z'} h_{i,1} E \left( E \left[ \left\| M_{PF}^- \left\{ A_{\vartheta', X_{\vartheta', 2}} \right\} \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF}^- \left\{ A_{k', X_{k', 2}} \right\} \right\| \right] \right) \\
&\quad + \sum_{\substack{c_{k,2} \in S_{y,1} \\ v'' < k \leq v'}} h_{k,2} E \llbracket M_{y,1} \rrbracket - h_{\vartheta', 2} E \llbracket L_{\vartheta', 2} \rrbracket - h_{\vartheta', 2} a_{\vartheta', 2}
\end{aligned}$$

C.Q.F.D.

### Démonstration A5.3

$$\begin{aligned}
\varepsilon(X^*, A^*) &= E \llbracket C(X^*, L) \rrbracket - E \llbracket C(A^*, L) \rrbracket \\
&= \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} E \llbracket M_{PF\{X^*\}} \rrbracket - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} H_i E \llbracket M_{i,l\{X^*\}} \rrbracket \right) - \sum_{l=1}^m \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E \llbracket L_{i,l} \rrbracket \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} E \llbracket X_{i,m} \rrbracket + b \times \left( E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^+ \rrbracket - T \right) + r \times \left( T - E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^- \rrbracket \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} E \llbracket M_{PF\{A^*\}} \rrbracket + \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} H_i E \llbracket M_{i,l\{A^*\}} \rrbracket \right) + \sum_{l=1}^m \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} E \llbracket L_{i,l} \rrbracket \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} E \llbracket A_{i,m} \rrbracket - b \times \left( E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^+ \rrbracket - T \right) - r \times \left( T - E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^- \rrbracket \right)
\end{aligned}$$

Sachant que:



- $M_{i,m-1\{A^*\}} = \max_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} (L_{k,m} - X_{k,m}^* - \delta) = \max_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} (L_{k,m} - X_{k,m}^*) - \delta$   
 $= M_{i,m-1\{X^*\}} - \delta$
- $M_{PF\{A^*\}}^+ = \max(M_{PF\{A^*\}}, T) = \max(M_{PF\{X_{k,m}^* - \delta\}}, T)$
- $M_{PF\{A^*\}}^- = \min(M_{PF\{A^*\}}, T) = \min(M_{PF\{X_{k,m}^* - \delta\}}, T)$
- $M_{PF\{A^*\}} = \max_{i=1, \dots, N_1} (M_{i,1\{A^*\}} + L_{i,1}) = \max_{i=1, \dots, N_1} (M_{i,1\{X^*\}} + L_{i,1} - \delta) = M_{PF\{X^*\}} - \delta$
- $M_{i,l-1\{A^*\}} = \max_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} (M_{k,l\{A^*\}} + L_{k,l}) = \max_{c_{k,l} \in S_{i,l-1}} (M_{k,l\{X^*\}} + L_{k,l} - \delta) = M_{i,l-1\{X^*\}} - \delta$

Alors :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(X^*, A^*) &= b \times (E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^+ \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^+ \rrbracket) + r \times (E \llbracket M_{PF\{A^*\}}^- \rrbracket - E \llbracket M_{PF\{X^*\}}^- \rrbracket) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} E \llbracket M_{PF\{X^*\}} \rrbracket - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} H_i E \llbracket M_{i,l\{X^*\}} \rrbracket \right) - \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} E \llbracket X_{i,m} \rrbracket \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} (E \llbracket M_{PF\{X^*\}} \rrbracket - \delta) + \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} H_i E \llbracket M_{i,l\{X^*\}} - \delta \rrbracket \right) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} E \llbracket X_{i,m} - \delta \rrbracket
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(X^*, A^*) &= b \times \left( E \left[ \left\| M_{PF\{X^*\}}^+ \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF\{A^*\}}^+ \right\| \right] \right) + r \times \left( E \left[ \left\| M_{PF\{A^*\}}^- \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF\{X^*\}}^- \right\| \right] \right) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} H_i E \left[ \left\| M_{i,l\{X^*\}} \right\| \right] \right) + \delta \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} + \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} H_i E \left[ \left\| M_{i,l\{X^*\}} - \delta \right\| \right] \right) \\ &\quad - \delta \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(X^*, A^*) &= b \times \left( E \left[ \left\| M_{PF\{X^*\}}^+ \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF\{A^*\}}^+ \right\| \right] \right) + r \times \left( E \left[ \left\| M_{PF\{A^*\}}^- \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF\{X^*\}}^- \right\| \right] \right) \\ &\quad + \delta \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} - \delta \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} \right) + \delta \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{c_{k,l+1} \in S_{i,l}} h_{k,l+1} \right) - \delta \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(X^*, A^*) &= b \times \left( E \left[ \left\| M_{PF\{X^*\}}^+ \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF\{A^*\}}^+ \right\| \right] \right) + r \times \left( E \left[ \left\| M_{PF\{A^*\}}^- \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF\{X^*\}}^- \right\| \right] \right) \\ &\quad - \delta \left[ \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} \right) - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{c_{k,l+1} \in S_{i,l}} h_{k,l+1} \right) + \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} \right]\end{aligned}$$

Or la somme des composants  $c_{k,l+1} \in S_{i,l}$  nécessaires à l'assemblage de tous les composants  $c_{i,l}$  est égale à  $N_{l+1}$  :

$$\sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_l} \sum_{c_{k,l+1} \in S_{i,l}} h_{k,l+1} \right) = \sum_{l=2}^m \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l}$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}\varepsilon(X^*, A^*) &= b \times \left( E \left[ \left\| M_{PF\{X^*\}}^+ \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF\{A^*\}}^+ \right\| \right] \right) + r \times \left( E \left[ \left\| M_{PF\{A^*\}}^- \right\| \right] - E \left[ \left\| M_{PF\{X^*\}}^- \right\| \right] \right) \\ &\quad - \delta \left[ \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} - \sum_{l=2}^m \sum_{i=1}^{N_l} h_{i,l} + \sum_{i=1}^{N_m} h_{i,m} - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} \right]\end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi l'expression (A.1) de cette annexe :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(X^*, A^*) &= b \times \left( E \left[ M_{PF\{X^*\}}^+ \right] - E \left[ M_{PF\{A^*\}}^+ \right] \right) + r \times \left( E \left[ M_{PF\{A^*\}}^- \right] - E \left[ M_{PF\{X^*\}}^- \right] \right) \\
&= Q \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( Pr \left[ M_{FP\{X^*\}} > s \right] - \frac{r}{b+r} \right) \\
&= Q \sum_{T \leq s < T+\delta} \left( Pr \left[ M_{FP\{A^*\}} + \delta > s \right] - \frac{r}{b+r} \right) \\
&= Q \sum_{T-\delta \leq s < T} \left( Pr \left[ M_{FP\{A^*\}} > s \right] - \frac{r}{b+r} \right)
\end{aligned}$$

Or  $\forall s, M_{FP\{X^*\}} > \psi_j$ , alors :

$$Pr \left[ M_{FP\{A^*\}} > s \right] \geq Pr \left[ \psi_j > s \right]$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\varepsilon(X^*, A^*) &\geq Q \sum_{T-\delta \leq s < T} \left( Pr \left[ \psi_j > s \right] - \frac{r}{b+r} \right) \\
\varepsilon(X^*, A^*) &\geq Q \sum_{T-\delta \leq s < T} \left( 1 - Pr \left[ \psi_j \leq s \right] - \frac{r}{b+r} \right) \\
\varepsilon(X^*, A^*) &\geq Q \sum_{T-\delta \leq s < T} \left( \frac{b}{b+r} - Pr \left[ \psi_j \leq s \right] \right) \\
\varepsilon(X^*, A^*) &\geq Q \sum_{T-\delta \leq s < T} \left( \frac{b}{b+r} - F(s - X_j^{**}) \right)
\end{aligned}$$

Or d'après l'expression (5.12),  $\forall T - \delta \leq s < T$  :

$$F(T - X_j^{**} - \delta) \leq \frac{b}{b+r} \leq F(T - X_j^{**})$$

D'où  $\varepsilon(X^*, A^*) \geq 0$ .

C.Q.F.D.

### Corollaire A.1

$$\begin{aligned} \forall \alpha \geq 1, k_\alpha \in \llbracket 0; N_\alpha \rrbracket, a_{k,\alpha} \in [T - U_{i,\alpha}, T - \alpha]: \\ \bullet Q_{\forall k; a_{k,\alpha} \geq 0}^+(L_{i,\alpha}, s, \alpha) \geq Q_{\forall k > k'_\alpha; a_{k,\alpha} = 0}^+(L_{i,\alpha}, s, \alpha) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Dans  $Q_{\forall k > k'_\alpha; a_{k,\alpha} = 0}^+(L_{i,\alpha}, s, \alpha)$ , nous avons:

$$\prod_{\substack{c_{k,\alpha} \in S_{i,\alpha-1} \\ \forall k > k'_\alpha; a_{k,\alpha} = 0}} F_{k,\alpha}(-a_{k,\alpha} + w) = \prod_{\substack{c_{k,\alpha} \in S_{i,\alpha-1} \\ k \leq k'_\alpha}} F_{k,\alpha}(-a_{k,\alpha} + w) \times \prod_{\substack{c_{k,\alpha} \in S_{i,\alpha-1} \\ k'_\alpha < k}} F_{k,\alpha}(w)$$

Dans  $Q_{\forall k; a_{k,\alpha} \geq 0}^+(L_{i,\alpha}, s, \alpha)$ , nous avons:

$$\prod_{\substack{c_{k,\alpha} \in S_{i,\alpha-1} \\ \forall k; a_{k,\alpha} \geq 0}} F_{k,\alpha}(-a_{k,\alpha} + w) = \prod_{\substack{c_{k,\alpha} \in S_{i,\alpha-1} \\ k \leq k'_\alpha}} F_{k,\alpha}(-a_{k,\alpha} + w) \times \prod_{\substack{c_{k,\alpha} \in S_{i,\alpha-1} \\ k'_\alpha < k}} F_{k,\alpha}(-a_{k,\alpha} + w)$$

Pour  $a_{k,\alpha} \in [T - U_{i,\alpha}, T - \alpha]$  et  $\forall \vartheta \in \mathbf{Z}$ :

$$\prod_{\substack{c_{k,\alpha} \in S_{i,\alpha-1} \\ k'_\alpha < k}} F_{k,\alpha}(\vartheta) - \prod_{\substack{c_{k,\alpha} \in S_{i,\alpha-1} \\ k'_\alpha < k}} F_{k,\alpha}(-a_{k,\alpha} + \vartheta) \geq 0$$

Nous concluons que  $Q_{\forall k > k'_\alpha; a_{k,\alpha} = 0}^+(L_{i,\alpha}, s, \alpha) - Q_{\forall k; a_{k,\alpha} \geq 0}^+(L_{i,\alpha}, s, \alpha) \geq 0$ .

### Démonstration A.5

Nous allons montrer que la borne inférieure  $BI(A_{k'})$  à un nœud du  $k_m^{ième}$  niveau de l'arbre d'exploration est une borne inférieure de  $E[C(A_{N_m}, L)]$ .

Soit  $\varepsilon = E_b + E_1 + E_l + E_m$  la différence entre  $BI(A_{k'})$  et  $E[C(A_{N_m}, L)]$ .

D'après l'équation (3.3), l'espérance mathématique  $E[C_{bPF}]$  du coût de rupture en produit fini est égale à:

$$E[C_{bPF}] = b \times \left( E \left[ M^+_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right] - T \right)$$

Soit  $E_b$  la différence entre:

- l'espérance mathématique  $E[C_{bPF}, A_{N_m}]$  du coût de rupture en produit fini associée au vecteur  $A_{N_m}$  et,
- l'espérance mathématique  $E[C_{bPF}, A_{k'}]$  du coût de rupture en produit fini associée au vecteur  $A_{k'}$ .

Cette espérance mathématique est égale à:

$$E_b = b \times \left( E \left[ M^+_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right] - E \left[ M^+_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right] \right)$$

D'après l'équation (5.2),  $E_b$  est égale à:

$$E_b = b \times \left( \sum_{s \geq T} \left( Q^+_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}(L_{i,1}, s, 1) - Q^+_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}(L_{i,1}, s, 1) \right) \right)$$

En utilisant l'expression (5.11) du corollaire (A.1), nous avons bien  $E_b \geq 0$ .

L'espérance du coût de stockage des composants  $c_{i,m}$  au niveau  $m$  de la nomenclature est calculée à partir de l'équation (5.3). Elle est égale à:

$$E[C_{sc_m}, A_{N_m}] = \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \left( \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} (E[M_{i,m-1}] - E[L_{k,m} + A_{k,m}]) \right)$$

Soit  $E_m$  la différence entre:

- L'espérance  $E[C_{sc_m}, A_{N_m}]$  du coût de stockage des composants  $c_{i,m}$ , avec  $A_{N_m}$  le vecteur des dates de lancement d'ordres aux fournisseurs afin de s'approvisionner en composants  $c_{i,m}$ .
- L'espérance  $E[C_{sc_m}, A_{k'}]$  du coût de stockage des  $k'_m$  premiers composants  $c_{i,m}$  du dernier niveau  $m$  dont le vecteur des dates de lancements d'ordres aux fournisseurs est  $A_{k'}$ .

$$E_m = \sum_{i=1}^{N_{m-1}} \left( \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} \left( E \left[ M_{\substack{i,m-1 \\ \forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}} \right] - E[L_{k,m} + a_{k,m}] \right) \right) \\ - \sum_{i=1}^{z_{m-1}} \left( \sum_{\substack{c_{k,m} \in S_{i,m-1} \\ k \leq k'_m}} h_{k,m} \left( E \left[ M_{\substack{i,m-1 \\ \forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}} \right] - E[L_{k,m} + a_{k,m}] \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
E_m = & \sum_{i=1}^{z'_m} \left( \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{i,m-1} \right] - E \llbracket L_{k,m} + a_{k,m} \rrbracket \right) \right) \\
& + \sum_{i=z'_m+1}^{N_{m-1}} \left( \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{i,m-1} \right] - E \llbracket L_{k,m} + a_{k,m} \rrbracket \right) \right) \\
& - \sum_{i=1}^{z'_m} \left( \sum_{\substack{c_{k,m} \in S_{i,m-1} \\ k \leq k'_m}} h_{k,m} \left( E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^{i,m-1} \right] - E \llbracket L_{k,m} + a_{k,m} \rrbracket \right) \right) \\
& - \sum_{\substack{c_{k,m} \in S_{z_{m-1},m-1} \\ k \leq k'_m}} h_{k,m} \left( E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^{z_{m-1},m-1} \right] - E \llbracket L_{k,m} + a_{k,m} \rrbracket \right) \\
E_m = & \sum_{i=z'_m+1}^{N_{m-1}} \left( \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{i,m-1} \right] - E \llbracket L_{k,m} + a_{k,m} \rrbracket \right) \right) \\
& - \sum_{\substack{c_{k,m} \in S_{z_{m-1},m-1} \\ k \leq k'_m}} h_{k,m} \left( E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^{z_{m-1},m-1} \right] - E \llbracket L_{k,m} + a_{k,m} \rrbracket \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_m = & \sum_{i=z_{m-1}+1}^{N_{m-1}} \left( \sum_{c_{k,m} \in S_{i,m-1}} h_{k,m} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{i,m-1} \right] \right] - E \left[ \left[ L_{k,m} + a_{k,m} \right] \right] \right) \right) \\
& + \sum_{\substack{c_{k,m} \in S_{z_{m-1},m-1} \\ k > k'_m}} h_{k,m} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{z_{m-1},m-1} \right] \right] - E \left[ \left[ L_{k,m} + a_{k,m} \right] \right] \right) \\
& + \sum_{\substack{c_{k,m} \in S_{z_{m-1},m-1} \\ k \leq k'_m}} h_{k,m} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{z_{m-1},m-1} \right] \right] - E \left[ \left[ L_{k,m} + a_{k,m} \right] \right] \right) \\
& - \sum_{\substack{c_{k,m} \in S_{z_{m-1},m-1} \\ k \leq k'_m}} h_{k,m} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^{z_{m-1},m-1} \right] \right] - E \left[ \left[ L_{k,m} + a_{k,m} \right] \right] \right)
\end{aligned}$$

Pour que  $E_m \geq 0$ , il reste à démontrer que :

$$\delta = E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{z_{m-1},m-1} \right] \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^{z_{m-1},m-1} \right] \right] \geq 0$$

Or, d'après l'expression (5.7):

$$E \left[ \left[ M_{i,l} \right] \right] = \sum_{s \geq 0} \left( 1 - Q^+(L_{i,l}, s, l) \right)$$

Alors :

$$\delta = \sum_{s \geq 0} \left( Q_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^+(L_{z_{m-1},m-1}, s, m-1) - Q_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^+(L_{z_{m-1},m-1}, s, m-1) \right)$$

Or, il résulte de l'expression (A.3) du *corollaire (A.1)* que:



$$\bullet Q_{\forall k > k'_m; X_{k,m}=a_{k,m}}^+(L_{z_{m-1},m-1}, s, m-1) - Q_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^+(L_{z_{m-1},m-1}, s, m-1) \geq 0$$

Nous en déduisons que  $\delta \geq 0$  et par conséquent  $E_m \geq 0$ .

Soit  $E[C_{SC_2, \dots, m-1}]$  l'espérance du coût de stockage des composants  $c_{i,l}$ ,  $l = 2, \dots, m-1$ .  
D'après l'expression (5.2), cette espérance est égale à:

$$E[C_{SC_2, \dots, m-1}] = \sum_{l=2}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \left( \sum_{c_{v,l} \in S_{i,l-1}} h_{v,l} (E[M_{i,l-1}] - (E[M_{v,l}] + E[L_{v,l}])) \right) \right)$$

Soit  $E_l$  la différence entre :

- L'espérance  $E[C_{SC_2, \dots, m-1}, A_{N_m}]$  du coût de stockage des composants  $c_{i,l}$ ,  $l = 2, \dots, m-1$  et associée au vecteur  $A_{N_m}$ .
- L'espérance  $E[C_{SC_2, \dots, m-1}, A_{k'}]$  du coût de stockage des  $k'_l$  premiers composants  $c_{i,l}$ ,  $l = 2, \dots, m-1$  et associée au vecteur  $A_{k'}$ :

$$E_l = \sum_{l=2}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_{l-1}} \left( \sum_{c_{v,l} \in S_{i,l-1}} h_{v,l} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{i,l-1} \right] - E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{v,l} + L_{v,l} \right] \right) \right) \\ - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{z'_l} \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} E[M_{i,l}] - \sum_{i=1}^{k''_{l+1}} h_{i,l+1} (E[M_{i,l+1}] + E[L_{i,l+1}]) \right)$$

$$- \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k''_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right]_{z_l,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right]_{v,l+1} \right] \right. \right. \\ \left. \left. - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \right)$$

$$E_l = \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{N_l} \left( \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{i,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{v,l+1} + L_{v,l+1} \right] \right) \right) \\ - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{z'_l} \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} E \left[ \left[ M_{i,l} \right] \right] - \sum_{i=1}^{k''_{l+1}} h_{i,l+1} (E \left[ \left[ M_{i,l+1} \right] \right] - E \left[ \left[ L_{i,l+1} \right] \right]) \right) \\ - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k''_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right]_{z_l,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right]_{v,l+1} \right] - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \right)$$

$$E_l = \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=z_{l+1}}^{N_l} \left( \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{i,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{v,l+1} \right] - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{z'_l} \left( \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{i,l} \right] - E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{v,l+1} \right] - E \left[ L_{v,l+1} \right] \right) \right) \\
& + \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k''_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{z_l,l} \right] - E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{v,l+1} \right] - E \left[ L_{v,l+1} \right] \right) \\
& + \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k > k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{z_l,l} \right] - E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{v,l+1} \right] - E \left[ L_{v,l+1} \right] \right) \\
& - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{z'_l} \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{i,l} \right] \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i=1}^{k''_{l+1}} h_{i,l+1} \left( E \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}}^{i,l+1} \right] + E \left[ L_{i,l+1} \right] \right) \right) \\
& - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k''_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^{z_l,l} \right] - E \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}}^{v,l+1} \right] - E \left[ L_{v,l+1} \right] \right) \right)
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{z'_l} \left( \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{i,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{v,l+1} \right] - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \right) \\
&= \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{i=1}^{z'_l} \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{i,l} \right] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^{k'_{l+1}} h_{i,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{i,l+1} \right] + E \left[ \left[ L_{i,l+1} \right] \right] \right) \right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
E_l &= \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{i=z_{l+1}}^{N_l} \left( \sum_{c_{v,l+1} \in S_{i,l}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{i,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{v,l+1} \right] - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \right) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k > k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{z_l,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{v,l+1} \right] \right. \\
&\quad \left. - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \\
&\quad + \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k'_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{z_l,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]_{v,l+1} \right] - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k'_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right]_{z_l,l} \right] - E \left[ \left[ \forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m} \right] \right] - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \right)
\end{aligned}$$

Soit :

$$\alpha = \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k''_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]^{z_l,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]^{v,l+1} \right] - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \\ - \sum_{l=1}^{m-1} \left( \sum_{\substack{c_{v,l+1} \in S_{z_l,l} \\ k'_{l+1} < k \leq k'_{l+1}}} h_{v,l+1} \left( E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right]^{z_l,l} \right] - E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right]^{v,l+1} \right] - E \left[ \left[ L_{v,l+1} \right] \right] \right) \right)$$

Pour démontrer que  $E_l \geq 0$ , il faut montrer que  $\alpha \geq 0$ . Or, d'après le *corollaire (A.1)*, nous pourrons facilement démontrer que :

$$E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]^{z_l,l} \right] \geq E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right]^{z_l,l} \right] \text{ et } E \left[ \left[ M_{\forall k; X_{k,m} \geq a_{k,m}} \right]^{v,l+1} \right] \geq \\ E \left[ \left[ M_{\forall k > k'_m; X_{k,m} = a_{k,m}} \right]^{v,l+1} \right].$$

Nous déduisons par la suite que  $\alpha \geq 0$  et  $E_l \geq 0$ . De la même manière,  $E_1$  peut-être démontrés. Finalement nous pouvons conclure que  $E_b + E_1 + E_l + E_m \geq 0$ .

C.Q.F.D.